Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

21. Februar 2017

1. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
In der Vorlesung wurde „bewiesen“, daß $-1 = 1$ ist:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Longrightarrow \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \Longrightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2 \Longrightarrow -1 = 1\,.$$

Was ist an diesem „Beweis“ falsch?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(3+i)(i+3)$ *b)* $(4+5i)(3-4i)$ *c)* $(1+i)^{20}$ *d)* $(1-i)^{20}$ *e)* $\dfrac{1+i}{1-i}$ *f)* $\dfrac{1+2i}{2+i}$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offen, welche abgeschlossen?

a) $\mathbb{C}$ *b)* $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1\right\}$ *c)* $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \le \mathfrak{Im}\, z < 2\pi\right\}$ *d)* $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}\, z = 0\right\}$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Wie aus der Analysis bekannt, konvergiert die Taylor-Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$ der Funktion $\log(1+x)$ für alle $x \in (-1, 1]$.

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ können Sie daraus folgern, daß die komplexe Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n/n$ konvergiert?

b) Konvergiert die Reihe für $z = i$ absolut?

c) Ordnen Sie die Reihe für $z = 1$ so um, daß die nicht mehr konvergiert!

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl z ist $|z/\bar{z}| = 1$.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 1$!

c) x sei eine reelle Zahl. Zeigen Sie, daß dann auch $\cos ix$ reell ist!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 28. Februar 2017, um 15.30 Uhr