Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. März 2017

4. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Hauptdivisoren der folgenden Funktionen auf der elliptischen Kurve $y^2 = x^3 - x$:

a) $f_1 = x^2 - 1$

b) $f_2 = y^3$

c) $f_3 = xy$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Drei Punkte P, Q, R einer elliptischen Kurve liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $(P + Q) + R = O$ ist.

b) Zeigen Sie ohne Benutzung des Assoziativgesetzes, daß dann auch $P + (Q + R) = O$ ist!

c) Gilt dies, bei der offensichtlichen Interpretation via Vielfachheit des Schnitts, auch wenn zwei oder mehr der drei Punkte zusammenfallen?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) E sei eine elliptische Kurve und $f \in k(X) \subset k(E)$ eine rationale Funktion, die nicht von y abhängt. Zeigen Sie, daß für den Hauptdivisor $(f) = \sum_{P\in E} a_P(P)$ gilt: Für alle $P \in E$ ist $a_P = a_{-P}$, und ist P kein gewöhnlicher Punkt von E, so ist a_P gerade.

b) Wie sieht (f) aus, wenn $f \in k(Y) \subset k(E)$ liegt, also nur von y abhängt?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Finden Sie für die folgenden Divisoren D auf der durch $y^2 = (x-1)(x-2)(x+3)$ gegebenen elliptischen Kurve E den Punkt $P \in E$, für den $D \sim P + m(O)$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ gilt!

a) $D = rQ$ für einen gewöhnlichen Punkt $Q \in E$ und $r \in \mathbb{Z}$

b) $D = rQ$ für einen speziellen Punkt $Q \in E$ und $r \in \mathbb{Z}$

c) $D = \big((1,0)\big) + \big((2,0)\big) + \big((-3,0)\big)$