Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

10. März 2017

3. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie auf der elliptischen Kurve $E\colon y^2 = x^3 - x$ alle Punkte P, in denen die angegebene Funktion eine von Null verschiedene Ordnung hat, und berechnen Sie diese Ordnung!

a) $f(x,y) = x$, *b)* $f(x,y) = y$, *c)* $f(x,y) = x/y$, *d)* $f(x,y) = y/(x^2-1)$

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Für einen Divisor D auf $\mathbb{P}^1(k)$ sei $L(D)$ die Menge aller Funktionen aus $k(X)$, für die der Divisor $(f) + D$ keine Punkte mit negativen Koeffizienten enthält; dabei sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Was können Sie über die Ordnungen der Funktionen aus $L(D)$ in den Punkten $P \in \mathbb{P}^1(k)$ sagen?

b) Folgern Sie, daß $L(D)$ ein k-Vektorraum ist!

c) Bestimmen Sie $\dim L(D)$ in Abhängigkeit von $\deg D$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

E sei eine elliptische Kurve und $f \in k(E)$ eine rationale Funktion auf E; der Grundkörper k sei algebraisch abgeschlossen.

a) Zeigen Sie: Ist f nicht konstant, so hat f mindestens eine Nullstelle und mindestens eine Polstelle.

b) Ist f nicht konstant, so definiert f eine surjektive Abbildung von E nach $\mathbb{P}^1(k)$.

c) Ist f dann auch injektiv?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. März 2017, um 10.15 Uhr