

3. März 2017

## 2. Übungsblatt Elliptische Kurven

### Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Hauptdivisoren auf  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  zu den folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = 1$    b)  $f(x) = x^3$    c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$    d)  $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$    e)  $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-9)}{(x+3)(x^2-4)}$

### Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a)  $k$  sei ein nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener Körper und  $f \in k(x)$ . Wir könnten auch in dieser Situation einen Divisor  $(f) = \sum_{P \in \mathbb{P}^1(k)} (\text{ord}_P f) \cdot P$  definieren. Muß dieser, wie im Falle algebraisch abgeschlossener Körper, den Grad Null haben?
- b)  $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  sei der Körper mit fünf Elementen. Finden Sie eine Funktion  $f \in k(X)$  mit  $(f) = 1 \cdot (1) - 2 \cdot (2) + 3 \cdot (3) - 4 \cdot (4) + 2 \cdot (\infty)$ !

### Aufgabe 3: (5 Punkte)

Finden Sie zu den folgenden Abbildungen der elliptischen Kurve  $E: Y^2Z = X^3 - Z^3$  nach  $\mathbb{P}^1(k)$ , sofern möglich, das dadurch definierte Element von  $k(E) = k(X) \oplus k(X) \cdot Y$ :

- a)  $(x : y : z) \mapsto (x : z)$   
b)  $(x : y : z) \mapsto (z^2 : x^2)$   
c)  $(x : y : z) \mapsto (y^3 : z^3)$   
d)  $(x : y : z) \mapsto (z^4 : y^4)$

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Normen und Grade der folgenden Funktionen auf den elliptischen Kurven  $E_1: Y^2Z = X^3 - Z^3$  und  $E_2: Y^2Z = X^3 - XZ^2$ :

a)  $X + Y$    b)  $X - XY$    c)  $\frac{1}{Y}$    d)  $\frac{1}{X+Y}$    e)  $\frac{X^3 - X}{X^3 - 1} + \frac{X^2 + 1}{X - 1}Y$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. März 2017, um 10.15 Uhr