Wolfgang K. Seiler | A5, C201
Tel. 2515

29. Oktober 2013

7. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Zeigen Sie, daß eine elliptische Kurve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ genau drei Wendepunkte hat!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*
$E \subset \mathbb{P}^2(k)$ sei eine elliptische Kurve und $P_0 \in E$ ein Punkt auf E. Zeigen Sie, daß man auf E eine Gruppenstruktur definieren kann mit P_0 als neutralem Element!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
a) Zeigen Sie: Für jeden Körper k ist die Abbildung $\varphi: k \to k^2$ mit $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ eine Bijektion von k auf die Kurve mit Gleichung $y^2 = x^3$. Was ist ihre Umkehrabbildung?
b) Dehnen Sie φ aus zu einer Abbildung von $\mathbb{P}^1(k)$ nach $\mathbb{P}^2(k)$. Was ist nun das Bild?
c) Zeigen Sie, daß die Menge der nichtsingulären Punkte der Bildkurve über die Ausdehnung von φ identifiziert werden kann mit der additiven Gruppe des Körpers k!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
a) Zeigen Sie, daß das Bild der Abbildung $\varphi: k \to k^2$ mit $\varphi(u) = (u^2 - 1, u^3 - u)$ die durch $y^2 = x^2(x+1)$ definierte Kurve ist!
b) Ist φ injektiv?
c) Dehnen Sie φ aus zu einer Abbildung von $\mathbb{P}^1(k)$ nach $\mathbb{P}^2(k)$. Was ist nun das Bild?
d) Zeigen Sie, daß die Menge der nichtsingulären Punkte der Bildkurve über die Ausdehnung von φ identifiziert werden kann mit der multiplikativen Gruppe des Körpers k!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 5. November 2013, um 15.25 Uhr