

15. Oktober 2013

5. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (4 Punkte)

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik nicht gleich zwei sei. Zeigen Sie, daß dann jede elliptische Kurve über k in einem geeigneten Koordinatensystem eine Gleichung der Form $Y^2Z = X(X - Z)(X - \lambda Z)$ hat mit einem $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$!

Aufgabe 2: (3 Punkte)

E sei eine elliptische Kurve über dem Körper k , und P, Q seien zwei Punkte aus $E(k)$. Zeigen Sie, daß auf der Verbindungsgeraden von P und Q noch ein weiterer Punkt aus $E(k)$ liegt!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Welche Bedingung müssen die Elemente $a, b \in k$ erfüllen, damit die Gleichung

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

eine elliptische Kurve definiert?

- b) Zeigen Sie: Ist diese Bedingung nicht erfüllt und verschwinden a und b nicht beide, so hat die durch obige Gleichung definierte Kurve einen singulären Punkt mit zwei verschiedenen Tangenten.
- c) Was passiert im Fall $a = b = 0$?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Bestimmen Sie die HESSEsche Kurve zu $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$!

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Kurven mit Gleichungen

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3 \quad \text{und} \quad Y^2Z = X^3 + cXZ^2 + dZ^3$$

in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in k$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 22. Oktober 2013, um 15.25 Uhr