

8. Oktober 2013

4. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Wie viele Punkte (in allgemeiner Lage) braucht man, um eine Kurve vom Grad d durch diese Punkte eindeutig festzulegen?
- b) Welche Dimension hat das lineare System aller Kurven vom Grad d mit dem Nullpunkt als r -fachem Punkt für $r = d - 1$, $r = d$ und $r = d + 1$?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

E und E' seien zwei kubische Kurven, die sich in genau neun Punkten schneiden. Zeigen Sie: Wenn sechs dieser Punkte auf einer (nicht notwendigerweise irreduziblen) Quadrik liegen, liegen die restlichen drei auf einer Geraden.

Hinweis: Die Vereinigung einer Quadrik mit einer Geraden ist eine kubische Kurve.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

$f(X, Z) = aX^3 + bX^2Z + cXZ^2 + dZ^3$ sei ein homogenes Polynom vom Grad drei über einem Körper k . Unter welchen Bedingungen definiert die Gleichung $Y^2Z = f(X, Z)$ eine elliptische Kurve über k ?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Welche der folgenden Gleichungen definieren elliptische Kurven?

- a) $X^3 + Y^3 + Z^3 = 2XYZ$
- b) $Y^2Z = X(X^2 - Z^2)$
- c) $(X + Y + Z)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$
- d) $X^3 + Y^3 = Z^3$

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Punkte auf der elliptischen Kurve $X^3 + Y^3 + Z^3 = XYZ$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$!
($\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit Addition und Multiplikation modulo fünf ist der Körper mit fünf Elementen.)

Abgabe bis zum Dienstag, dem 15. Oktober 2013, um 15.25 Uhr