Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

1. Oktober 2013

3. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Die Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)z^2 = 0$$

mit einem Parameter $a \in k$, k algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der Geraden $z = 0$!

b) In welchen Punkten hat C eine Tangente der Form $x = \lambda z$, in welchen eine der Form $y = \lambda z$?

c) Bestimmen Sie die Tangente(n) an C im Punkt $(0:0:1)$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Welche Gleichung(en) muß das Koeffizientenpaar

$$\big((a_1:b_1:c_1),(a_2:b_2:c_2)\big) \in \mathbb{P}^2(k)\times\mathbb{P}^2(k)$$

erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad \text{und} \quad a_2x+b_2y+c_2z=0$$

einen zweidimensionalen Lösungsraum hat?

b) Zeigen Sie, daß sich $\mathbb{P}^2(k)\times\mathbb{P}^2(k)$ einbetten läßt in $\mathbb{P}^8(k)$ mit den Koordinaten $c_{ij} = a_ib_j$!

c) Welche Polynome verschwinden auf dem Bild dieser Einbettung?

d) Welche weiteren Polynome verschwinden in den Bildern jener Punkte, die die Bedingung aus *a)* erfüllen?

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Welche Gleichung(en) müssen die Koordinaten dreier Punkte aus $\mathbb{P}^2$ erfüllen, wenn die drei Punkte bezüglich Geraden nicht in allgemeiner Lage sind?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
$\mathcal{L}_d$ sei das lineare System aller Kurven vom Grad $d \geq 1$ in $\mathbb{P}^2(k)$.

a) Geben Sie die Dimension von $\mathcal{L}_d$ an ohne Verwendung von Binomialkoeffizienten!

b) Zeigen Sie, daß es im projektiven Raum $\mathcal{L}_d$ endlich viele Hyperflächen (d.h. Nullstellenmengen eines homogenen Polynoms in den Koordinaten) gibt, so daß jeder Divisor $D \in \mathcal{L}_d$, der *nicht* die Form $D = C$ hat mit einer irreduziblen Kurve C vom Grad d, auf mindestens einer dieser dieser Hyperflächen liegt!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 8. Oktober 2013, um 15.25 Uhr