

10. September 2013

1. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- Geben Sie die Gerade durch die Punkte $(1 : 2 : 3)$ und $(3 : 2 : 1)$ der projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sowohl in Parameterform als auch als Nullstellenmenge einer linearen Gleichung an!
- Zeigen Sie, daß zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stets genau einen Schnittpunkt haben!
- Gilt dies auch für Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Die affine Ebene \mathbb{R}^2 sei durch die Abbildung $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ in die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eingebettet.

- Finden Sie eine projektive ebene Kurve, die das Bild der Kreislinie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

enthält! Welche zusätzlichen Punkte enthält sie?

- Finden Sie eine projektive ebene Kurve, die das Bild der Hyperbel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

enthält! Welche zusätzlichen Punkte enthält sie?

- Finden Sie einen Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, durch den die beiden Kurven ineinander bergehen!
- Geht das auch für die Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- Die Abbildung $\varphi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$\varphi((s : t)) = (s^2 - t^2 : 2st : s^2 + t^2).$$

Zeigen Sie, daß φ die projektive Gerade bijektiv abbildet auf eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, und identifizieren Sie diese!

- Beschreiben Sie die Umkehrabbildung $\psi: C \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ durch Polynome in den Koordinaten $x : y : z$ der projektiven Ebenen!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Bestimmen Sie Schnittpunkte der Kurve $C = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x^3 + y^3 = z^3\}$ mit den angegebenen Geraden und berechnen Sie deren Vielfachheiten!

- $g_1 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x + y = z\}$
- $g_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x = z\}$
- $g_3 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x = 0\}$

Abgabe bis zum Dienstag, dem 17. September 2013, um 15.25 Uhr