

23. Januar 2004

13. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Finden Sie Polynome a_1, a_2, R derart, daß für

$$f = x^7 y^2 + x^3 y^2 - y - 1, \quad f_1 = xy^2 - x \quad \text{und} \quad f_2 = x - y^3$$

gilt $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + R$; wobei R nur Terme enthält, die kleiner sind als die führenden Terme von f_1 und f_2 bezüglich

- a) der lexikographischen Ordnung b) der graduierten lexikographischen Ordnung!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Konstruieren Sie ohne Verwendung eines eingebauten GRÖBNER-Basis-Kommandos eine GRÖBNER-Basis des Ideals $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x, 2x - 3y - z)$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Der `solve`-Operator darf dabei nur für Polynome einer Veränderlichen verwendet werden.
- b) Beschreiben Sie die Nullstellenmenge $V(I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$ geometrisch, und zeichnen Sie die drei Objekte, deren Schnittmenge $V(I)$ ist!
- c) Geben Sie die Elemente von $V(I)$ explizit an!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Konstruieren Sie einen Zufallsgenerator, der gleichverteilte ganze Zufallszahlen zwischen null und $10^8 - 1$ liefert.
- b) Wenden Sie diesen an, um eine Prozedur `zufall12()` zu schreiben, die diesen Generator zwölf Mal aufruft, die zwölf erhaltenen Zufallszahlen addiert, die Summe mit 10^{-8} multipliziert, und als Resultat das um sechs verminderte Ergebnis liefert!
- c) Erzeugen Sie mit `zufall12()` zehn Tausend Zufallszahlen, zählen Sie, wie viele von diesen in jedem der Intervalle $[\frac{i}{10} - \frac{1}{20}, \frac{i}{10} + \frac{1}{20})$ für $i = -30$ bis 30 liegen, und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar!
- d) Vergleichen Sie die erhaltenen Häufigkeiten (graphisch) mit denen, die man für Zufallszahlen aus einer Standardnormalverteilung erwarten würde!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Eine Zufallsvariable heißt *exponentialverteilt* mit Parameter λ , wenn sie nur nichtnegative reelle Zahlen als Werte liefert und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer dieser Werte im Intervall $[a, b]$ mit $0 \leq a \leq b$ liegt, gleich $\int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$ ist.

- a) Zeigen Sie, daß diese Definition sinnvoll ist in dem Sinne, daß die Werte mit Wahrscheinlichkeit eins nichtnegative reelle Zahlen sind.
- b) Schreiben Sie, ausgehend von einem Zufallsgenerator für gleichverteilte Zufallszahlen, eine Prozedur `zufall13(λ)`, die exponentialverteilte Zufallszahlen liefert!
- c) Erzeugen Sie damit für $\lambda = \frac{1}{2}, 1$ und 2 jeweils $10\,000$ Zufallszahlen x_i und berechnen Sie deren Mittelwert \bar{x} sowie ihre Varianz $\frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} (x_i - \bar{x})^2$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. Januar 2004, um 12.00 Uhr