WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, C201

5. Dezember 2003

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
$\vec{v}$ sei ein Vektor aus $\mathbb{C}^n$ und $a = \vec{v} \cdot \vec{v}$ sei das HERMITEsche Skalarprodukt von $\vec{v}$ mit sich selbst. Die Matrix $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Einträge $w_{\mu\nu} = v_\mu \overline{v_\nu}$, und $M = aE - 2W$ habe Realteil A und Imaginärteil B, d.h. $M = A + iB$ mit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie: $M^2 = a^2E$.

b) Folgern Sie daraus, daß $AB = -BA$ ist!
(Resultat von G. PHILIPPE, *Quadrature, Oct.-Déc. 2000, S. 23–34.)*

c) Schreiben Sie eine Prozedur, die M aus $\vec{v}$ konstruiert!

d) Finden Sie zwei ganzzahlige 10×10-Matrizen A, B mit $AB = -BA$. *(Hinweis:* `evalm` *kann mit* `Re` *und* `Im` *umgehen.)*

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Das KRONECKER-Produkt $A * B$ zweier Matrizen $A \in k^{n\times m}$ und $B \in k^{p\times q}$ ist definiert als jene $np \times mq$-Matrix die entsteht als $n \times m$-Blockmatrix mit Einträg $a_{ij}B$ im Block ij. Schreiben Sie eine Funktion `Kronecker(A, B)`, die dieses Produkt berechnet! Die folgenden Maplefunktionen können dazu nützlich sein: `augment`, `stackmatrix`, `rowdim`, `coldim`.

b) Wenden Sie diese Funktion an auf die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}\ !$$

c) Lassen Sie Maple nachrechnen, daß in diesem Fall alle Zeilen- und Spaltensummen sowie die Summe über die Diagonale oder Nebendiagonale in A, B und $A * B$ einen nur von der Matrix abhängigen Wert haben!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Faktorisieren Sie das Polynom $f = x^{10} + 2x^6 + 10x^5 + 40x^4 + 36x^2 + 10x + 16$ über $\mathbb{Z}/41$ durch explizite Anwendung des BERLEKAMP-Algorithmus! *(Hinweis: Zum Lösen linearer Gleichungssysteme gibt es in Maple die Operatoren* `linsolve` *und* `Linsolve`*.)*

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Schreiben Sie eine Prozedur, die zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix B berechnet derart, daß $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist!

b) Wenden Sie diese an auf die Matrix $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ mit Einträgen $m_{ij} = 0{,}95^{|i-j|}$!

c) Berechnen Sie $B^{-1}AB$ und interpretieren Sie das Ergebnis!

d) Zeichnen Sie ein Bild, in dem die Matrizen A, B, B^{-1} und $B^{-1}AB$ in der Anordnung $\begin{matrix} A & B \\ B^{-1} & B^{-1}AB \end{matrix}$ graphisch dargestellt werden!

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Dezember 2003, um 12.00 Uhr