

23. November 2025

12. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

R sei ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

- Wenn für zwei Elemente $a, b \in R$ das Ideal (a, b) gleich dem von $c \in R$ erzeugten Hauptideal ist, ist c ein größter gemeinsamer Teiler von a und b .
- Ist R ein Hauptidealring, so existiert zu je zwei Elementen $a, b \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler $c \in R$, und es gibt Elemente $\alpha, \beta \in R$, für die $c = \alpha a + \beta b$ ist.
- Jeder EUKLIDISCHE Ring R ist ein Hauptidealring. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $v: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$!

Aufgabe 2:

- R sei ein beliebiger Ring, und $I = (a)$ sowie $J = (b)$ seien zwei Hauptideale. Zeigen Sie: $I + J = (a, b)$ und $I \cdot J = (ab)$.
- Ist $I = (a_1, \dots, a_n)$ und $J = (b_1, \dots, b_m)$, so ist $I + J = (a, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$, und $I \cdot J$ wird erzeugt von den nm Produkten $a_i b_j$.
- In \mathbb{Z} sei $I = (5)$ und $J = (9)$. Zeigen Sie, daß $I \cap J = I \cdot J$ ist!
- Gilt dies auch noch dann, wenn wir I durch das Hauptideal (15) ersetzen?
- R sei ein faktorieller Ring, und I, J seien zwei Hauptideale in R . Zeigen Sie, daß dann auch $I \cap J$ ein Hauptideal ist! Wann ist $I \cap J = I \cdot J$?

Aufgabe 3:

Ordnen Sie die Terme des Polynoms

$$f = 5X^4YZ + 7X^2Y^2Z^2 + 9Y^4Z^2 + 11X^3Y^3 + 13X^5 + 15X^3Z^3 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$$

der Größe nach

- für die lexikographische Ordnung
- für die graduiert lexikographische Ordnung
- für die invers lexikographische Ordnung
- für die graduiert invers lexikographische Ordnung!

Aufgabe 4:

Im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ sei

$$f = X^2Y^4 + Y^8 + X^3Y^2 - Y^2 - 6X, \quad f_1 = XY - 2 \quad \text{und} \quad f_2 = Y^3 - 1.$$

- Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von f durch f_1, f_2 bezüglich der lexikographischen Ordnung!
- Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von f durch f_2, f_1 bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung!
- Liegt f im von f_1 und f_2 erzeugten Ideal von $\mathbb{Q}[X, Y]$?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 26. November 2025, um 15.30 Uhr