Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

B6,26, A4.18

*10. Juni 2020*

# Modulklausur Computeralgebra

**Aufgabe 1:** *(10 Punkte)*

Wir betrachten die Polynome $f = 2X^4 + 6X^3 - 30X^2 + 32X - 24$ und $g = 2X^4 - 4X^2 - 6X - 4$ aus $\mathbb{Z}[X]$.

*a)* Bestimmen Sie die Inhalte und die primitiven Anteile der beiden Polynome!

*b)* Bestimmen Sie den ggT mit führendem Koeffizienten eins von $f \bmod 5$ und $g \bmod 5$ in $\mathbb{F}_5[X]$ !

*c)* Bestimmen Sie den ggT mit führendem Koeffizienten eins von $f \bmod 7$ und $g \bmod 7$ in $\mathbb{F}_7[X]$ !

*d)* Was können Sie auf Grund der bisherigen Ergebnisse *sicher* über den Grad des ggT von $f$ und $g$ in $\mathbb{Z}[X]$ aussagen?

*e)* Erraten Sie den ggT von $f$ und $g$ in $\mathbb{Q}[X]$ und beweisen Sie, daß Sie richtig geraten haben!

*f)* Bestimmen Sie den ggT von $f$ und $g$ in $\mathbb{Z}[X]$ !

**Aufgabe 2:** *(8 Punkte)*

Hier seien $f = 6X^2 - 7X - 3$ und $g = 2X^2 - 5X + 2$.

*a)* Für welche Primzahlen $p$ können Sie anhand der bislang vorliegenden Information nicht ausschließen, daß der ggT von $f$ und $g$ in $\mathbb{Z}[X]$ einen größeren Grad hat als der von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[X]$ ?

*b)* Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = 6X^2 - 7X - 3$ und $g = 2X^2 - 5X + 2$ aus $\mathbb{Z}[X]$ !

*c)* Bestimmen Sie den ggT von $f$ und $g$ in $\mathbb{Z}[X]$ !

*d)* Für welche Primzahlen $p$ hat $\operatorname{ggT}(f \bmod p, g \bmod p)$ einen größeren Grad als $\operatorname{ggT}(f, g)$ ?

*e)* $g$ hat die beiden Nullstellen $2$ und $\frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die $L^1$-Norm, die $L^2$-Norm, die Höhe und das Maß von $g$ !

**Aufgabe 3:** *(12 Punkte)*

Für das Polynom $f = X^4 - 10X^3 + 25X^2 - 20X + 4$ ist $f \equiv (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 3X + 2) \bmod 5$.

*a)* Setzen Sie diese Faktorisierung modulo fünf nach dem Henselschen Lemma fort zu einer Faktorisierung modulo fünfundzwanzig!

*b)* Finden Sie damit eine Zerlegung von $f$ in $\mathbb{Z}[X]$ als Produkt zweier quadratischer Polynome!

*c)* Zeigen Sie, daß eines dieser Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist, während das andere als Produkt zweier Linearfaktoren aus $\mathbb{Z}[X]$ geschrieben werden kann.

*d)* Wie sieht die Zerlegung von $f$ in ein Produkt irreduzibler Faktoren in $\mathbb{Z}[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$ aus?

• • • B I T T E  W E N D E N ! • • •

**Aufgabe 4:** *(10 Punkte)*

Welche der folgenden Teilmengen sind auch Ideale des jeweiligen Rings?

*a)* $\{z \in \mathbb{Z} \mid 2z \equiv 3 \bmod 5\} \subset \mathbb{Z}$

*b)* $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade}\} \subset \mathbb{Z}$

*c)* $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f \text{ hat eine mindestens doppelte Nullstelle bei } x = 1\} \subset \mathbb{Q}[X]$

*d)* $\left\{f = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i \mid d \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \sum\limits_{i=0}^{d} a_i = 0\right\} \subset \mathbb{Z}[X]$

*e)* $\{f \in \mathbb{R}[X, Y] \mid f(x, y) = f(y, x) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[X, Y]$

**Aufgabe 5:** *(10 Punkte)*

*a)* Bringen Sie die Terme des Polynoms $f = 2X^3Y + 2XY^3 + 2X - X^2Y - Y^3 - 2 + Y$ in die Reihenfolge, die der graduiert lexikographischen Ordnung mit $X > Y$ entspricht!

*b)* Dividieren Sie $f$ bezüglich dieser Ordnung durch die beiden Polynome $f_1 = X^2Y + Y^3 + 2$ und $f_2 = Y^2X + X^3 + 1$ !

*c)* Können Sie eine Aussage treffen, ob $f$ im Ideal $I = (f_1, f_2)$ des Polynomrings $\mathbb{Q}[X, Y]$ liegt?

*d)* Zeigen Sie, daß die Polynome $g_1 = 2X - Y$ und $g_2 = 5Y^3 + 8$ eine GRÖBNER-Basis des Ideals $(g_1, g_2)$ bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung bilden!

*e)* Tatsächlich ist $I = (g_1, g_2)$. (Das müssen Sie nicht zeigen.) Können Sie mit dieser Zusatzinformation entscheiden, ob $f$ in $I$ liegt?

**Aufgabe 6:** *(10 Punkte)*

$k$ sei ein Körper, und $I$ ein Ideal im Polynomring $k[X, Y, Z]$.

*a)* Wie ist eine Monomordnung auf diesem Polynomring definiert?

*b)* Wie ist eine GRÖBNER-Basis von $I$ definiert?

*c)* Hat jedes Ideal $I$ bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis?

*d)* Zeigen Sie, daß das Polynom $f = X^2 + 2Y^2 + 3Z + 5X^2Y^2Z^2 + 7XY + 11YZ$ bezüglich jeder Monomordnung denselben führenden Term hat, und bestimmen Sie diesen!

*e)* Zeigen Sie, daß die beiden Polynome $g_1 = X^5 + X^4Y + Y^6 + Z^4 + X^2Y^2Z^2 + X^3Y^4$ und $g_2 = X^5 + Z^6 + X^2Y^3 + XYZ$ bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung eine GRÖBNER-Basis des von ihnen erzeugten Ideals bilden!

**Aufgabe 7:** *(10 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie die reduzierte GRÖBNER-Basis bezüglich der lexikographischen Ordnung für das von den Polynomen $f = X^2 - 4X + Y^2 + 2$ und $g = 2X^2 - 8X + 3Y^2 + 3$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ erzeugte Ideal $I$ !

*b)* Hat diese GRÖBNER-Basis eine Form gemäß dem *Shape*-Lemma?

*c)* Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von $\mathbb{Q}[X, Y]/I$ !

*d)* Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $V_{\mathbb{C}}(I)$ !

*e)* Interpretieren Sie diese geometrisch!

*f)* Welche Vielfachheiten haben die gefundenen Nullstellen jeweils?

*g)* Finden Sie dazu eine separierende Linearform aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ !

*h)* Ist $I$ ein Radikalideal?

**Abgabe** bis zum Mittwoch, dem 10. Juni 2020, um 15.30 Uhr