Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6,26, A4.18

8. Februar 2012

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
Finden Sie eine komplexe Zahl $z = x + iy$, für die gilt
a) $z^2 = 3 + 4i$ *b)* $z^3 = 22 + 7\sqrt{-5}$

Lösung:
a) Sei $z = x+iy$. Dann ist $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy \cdot i$; somit müssen wir reelle Zahlen x, y finden mit $xy = 2$ und $x^2 - y^2 = 3$. Einsetzen von $y = 2/x$ in die zweite Gleichung führt auf

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \quad \text{oder} \quad x^4 - 4 - 3x^2 = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2 = 0\,.$$

Somit ist

$$x^2 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}\,.$$

Da x^2 das Quadrat einer reellen Zahl sein soll, kommt nur die Lösung $x^2 = 4$ in Frage; dann ist $y^2 = 1$. Wegen $xy = 2$ haben wir somit die beiden Lösungen $x = 2, y = 1$ und $x = -2, y = -1$, d.h. $z = \pm(2 + i)$.

b) Wir versuchen unser Glück mit einem Ansatz der Form $z = a + b\sqrt{-5}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$z^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-5} - 15ab^2 - 5b^3\sqrt{-5} = (a^3 - 15ab^2) + (3a^2b - 5b^3)\sqrt{-5}\,.$$

Wir suchen also ganze Zahlen a, b mit

$$a(a^2 - 15b^2) = 22 \quad \text{und} \quad b(3a^2 - 5b^2) = 7\,.$$

Wegen der zweiten Gleichung kommen für $b \in \mathbb{Z}$ nur die Werte ± 1 und ± 7 in Frage; für $b = \pm 1$ muß $3a^2 - 5 = \pm 7$ sein, was für $b = 1$ und $a = \pm 2$ erfüllt ist. Einsetzen in die erste Gleichung führt auf $\pm 2(4 - 15) = 22$, was mit dem Minuszeichen auch tatsächlich gilt. Also ist $a = -2$ und $b = 1$ eine Lösung, d.h. $z = -2 + \sqrt{5} \cdot i$.

c) Wie können Sie daraus die sämtlichen Lösungen dieser Gleichungen bestimmen? (Eventuell notwendige Rechnungen müssen nicht durchgeführt werden.)

Lösung: Bei *a)* kennen wir bereits beide Lösungen; bei *b)* gibt es zwei weitere Lösungen, nämlich $z\rho$ und$z\bar\rho$, wobei ρ eine primitive dritte Einheitswurzel ist, d.h. ρ und $\bar\rho$ sind $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Aufgabe 2: *(14 Punkte)*
a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist!

Lösung: Wäre das Polynom nicht irreduzibel, müßte es Produkt zweier linearer Polynome aus $\mathbb{Z}[x]$ sein. Deren Nullstellen wären aber rationale Zahlen, während $x^2 - 2$ nur die beiden irrationalen Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ hat.

b) Zeigen Sie, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$ in $\mathbb{Z}[x]$ durch $x^2 - 2$ teilbar ist!
Hinweis: Betrachten Sie den ggT von f und $x^2 - 2$!

Lösung: Da $h = \text{ggT}(f, x^2 - 2)$ als Linearkombination dieser beiden Polynome dargestellt werden kann, verschwindet auch h an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Als Teiler von $x^2 - 2$ kann h höchstens den Grad zwei haben; da es kein lineares Polynom in $\mathbb{Z}[x]$ gibt, das an der Stelle $\sqrt{2}$ verschwindet, muß h quadratisch sein, also (bis aufs Vorzeichen) gleich $x^2 - 2$. Somit ist $x^2 - 2$ ein Teiler von f.

c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$!

Lösung: Da jedes solche Polynom nach *b)* durch $x^2 - 2$ teilbar ist, muß f das Produkt aus $x^2 - 2$ und einer Einheit von $\mathbb{Z}[x]$ sein, d.h. $f = x^2 - 2$ oder $f = 2 - x^2$.

d) Zeigen Sie: Jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, das an der Stelle $x = \sqrt{2}$ verschwindet, verschwindet auch an der Stelle $x = -\sqrt{2}$. Gilt dies auch für Polynome aus $\mathbb{R}[x]$?

Lösung: Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten können wir erreichen, daß f zu einem Polynom aus $\mathbb{Z}[x]$ wird; an den Nullstellen ändert sich dadurch natürlich nichts. Da $f(\sqrt{2})$ verschwindet, ist dieses ganzzahlige Polynom nach *b)* durch $x^2 - 2$ teilbar, verschwindet also auch für $x = -\sqrt{2}$.
Für Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ muß das natürlich nicht gelten; das einfachste Gegenbeispiel ist $f(x) = x - \sqrt{2}$.

e) Ein Polynom zehnten Grades aus $\mathbb{Z}[x]$ verschwinde an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sowie für $x = 1 + \sqrt{2}$. Bestimmen Sie die zehnte Nullstelle des Polynoms!

Lösung: Nach dem Wurzelsatz von VIÈTE ist sowohl die Summe aller Nullstellen als auch deren Produkt ganzzahlig. Aus der Ganzzahligkeit der Summe folgt, daß die gesuchte Nullstelle von der Form $x = a - \sqrt{2}$ sein muß, und aus der Ganzzahligkeit des Produkts folgt, daß $(1 + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) = a - 2 + (a - 1)\sqrt{2}$ zumindest rational sein muß. Wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ geht das nur, wenn $a = 1$ ist; die fehlende Nullstelle ist also $1 - \sqrt{2}$.

f) Finden Sie die sämtlichen Nullstellen des Polynoms $g = x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4$!

Lösung: Nach VIÈTE ist das Produkt aller Nullstellen gleich vier, also probieren wir Teiler von vier aus: $g(1) = 2, g(-1) = 0, g(2) = 0, g(-2) = 8$. Da -1 und 2 Nullstellen sind, ist das Produkt der beiden verbleibenden gleich -2, ± 4 kommen somit nicht in Frage und müssen daher auch nicht getestet werden. Da wir alle Teiler von zwei bereits getestet haben, sind die beiden verbleibenden Nullstellen nicht ganzzahlig. Ihre Summe ergibt zusammen mit -1 und 2 den negativen Koeffizienten von x^3, also eins, und ist somit gleich Null. Das geht nur, wenn die noch fehlenden Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ sind.

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 539 und 357 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

Lösung: Wir berechnen den ggT nach dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
539 : 357 &= 1 \text{ Rest } 182 \Longrightarrow 182 = 539 - 357 \\
357 : 182 &= 1 \text{ Rest } 175 \Longrightarrow 175 = 357 - (539 - 357) = 2 \cdot 357 - 539 \\
182 : 175 &= 1 \text{ Rest } 7 \Longrightarrow 7 = (539 - 357) - (2 \cdot 357 - 539) = 2 \cdot 539 - 3 \cdot 357 \\
175 : 7 &= 25 \text{ Rest } 0
\end{aligned}$$

Der ggT ist also $7 = 2 \cdot 539 - 3 \cdot 357$.

b) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $539x - 357y = 35$!

Lösung: Multiplikation der Gleichung $7 = 2 \cdot 539 - 3 \cdot 357$ mit fünf führt zu

$$539 \cdot 10 - 367 \cdot 15 = 35\,;$$

$(10, 15)$ ist also eine Lösung. Um alle Lösungen zu bekommen, müssen wir dazu die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $539x - 357y = 0$ addieren. Da der ggT der Koeffizienten gleich sieben ist, können wir dadurch kürzen und erhalten die einfachere Gleichung $77x - 51y = 0$ mit teilerfremden Koeffizienten. Deren Lösungen sind somit die ganzzahligen Vielfachen des Paars $(51, 77)$; die allgemeine Lösung unserer Ausgangsgleichung sind also die Paare $(10 + 51k,\ 15 + 77k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) Berechnen Sie für zwei feste, aber beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Resultante der beiden Polynome $f = x^2 - a$ und $g = x - b$, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung: Da f den Grad zwei und g den Grad eins hat, stehen die Koeffizienten von f einmal und die von g zweimal in den Zeilen der SYLVESTER-Matrix, die Resultante ist also

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = b^2 - a$$

nach der Regel von SARRUS. Das Ergebnis bedeutet, daß f und g nur im Falle $b = a^2$ einen gemeinsamen Faktor haben, was natürlich auch ohne Resultante klar war nach der dritten binomischen Formel.

Aufgabe 4: *(14 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ist $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein primitives Polynom und $g \in \mathbb{Z}[x]$ ein beliebiges Polynom, so ist $\operatorname{ggT}(f, ag) = \operatorname{ggT}(f, g)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

Lösung: Da der Inhalt des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Inhalte ist, haben sowohl $\operatorname{ggT}(f, g)$ als auch $\operatorname{ggT}(f, ag)$ den Inhalt eins; da sie sich höchstens um eine Konstante unterscheiden können, sind also die beiden größten gemeinsamen Teiler gleich.

b) Das Polynom $f = 3x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 12x + 3$ aus $\mathbb{Z}[x]$ läßt sich schreiben als $f = ag^2$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und einem primitiven Polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$. Bestimmen Sie a und g!

Lösung: Da ein primitives Polynom den Inhalt eins hat, ist a der Inhalt von f, d.h. $a = 3$. Gesucht ist somit ein Polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$ mit

$$g^2 = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1\,.$$

Um g zu bestimmen, führen wir die quadratfreie Faktorisierung dieses Polynoms durch. Seine Ableitung ist

$$4x^3 - 12x^2 + 4x + 4 = 4(x^3 - 3x^2 + x + 1)\,;$$

nach *a)* genügt es daher, den ggT von $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ und $x^3 - 3x^2 + x + 1$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) : (x^3 - 3x^2 + x + 1) &= x - 1 \quad \text{Rest } -2x^2 + 4x + 2 = -2(x^2 - 2x - 1) \\ (x^3 - 3x^2 + x + 1) : (x^2 - 2x - 1) &= x - 1 \quad \text{Rest } 0 \end{aligned}$$

Somit ist der ggT gleich dem primitiven Polynom $x^2 - 2x - 1$, und das ist auch das gesuchte Polynom g.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f sowie die Faktorisierung von f in $\mathbb{Z}[x]$!

Lösung: Das Polynom $g = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ hat die Nullstellen $1 \pm \sqrt{2}$; diese sind jeweils doppelte Nullstellen von f. Da sie irrational sind, kann g in $\mathbb{Z}[x]$ nicht weiter zerlegt werden; die Faktorisierung von f ist also $f = 3g^2$.

d) $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ seinen zwei beliebige Polynome, M sei die LANDAU-MIGNOTTE-Schranke von P und N die von Q. Was können Sie über die Koeffizienten von $\mathrm{ggT}(P, Q)$ sagen?

Lösung: Da der ggT sowohl P als auch Q teilt, ist der Betrag eines jeden Koeffizienten sowohl kleiner oder gleich M als auch kleiner oder gleich N, also höchstens gleich dem Minimum dieser beiden Zahlen.

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*
Das Ideal I aus $\mathbb{Q}[x, y]$ sei erzeugt von den beiden Polynomen $f = x^2 + y^2 - 4$ und $g = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4$.

a) Bilden f und g eine GRÖBNER-Basis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung?

Lösung: Bezüglich der lexikographischen Ordnung ist der führende Term von f gleich x^2, der von $g = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 4 = x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2$ auch. Das S-Polynom ist somit $S(f, g) = f - g = 2x + 2y - 2$. Da der führende Term $2x$ nicht durch x^2 teilbar ist, führt der Divisionsalgorithmus bei Division durch f und g einfach dazu, daß das gesamte Polynom in den Rest kommt. Damit können f und g keine GRÖBNER-Basis bilden, denn sonst müßte der Divisionsalgorithmus nach BUCHBERGERS Kriterium auf Rest null führen.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

Lösung: Wenn f und g in einem Punkt verschwinden, verschwindet dort natürlich auch $S(f, g) = 2x + 2y - 2$; für jeden solchen Punkt muß also $x + y = 1$ sein. Einsetzen von $y = 1 - x$ in die erste (oder zweite) Gleichung führt auf

$$x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 4 \quad \text{oder} \quad x^2 - x = \frac{3}{2}\,.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \quad \text{mit} \quad y = 1 - x = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{7}{4}}\,.$$

Die Lösungsmenge besteht also aus den beiden Punkten

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{4}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{4}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}}\right)\,.$$

c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus *b)* geometrisch!

Lösung: Die Nullstellenmengen von f *bzw.* g sind Kreislinien mit Radius zwei um den Nullpunkt *bzw.* den Punkt $(1, 1)$. Diese beiden Kreise schneiden sich in den beiden berechneten Punkten, deren Verbindungsgerade die Nullstellenmenge von $S(f, g)$ ist.