Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Dezember 2011

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl mit

a) $z^2 = 1 + 2i$ *b)* $z^3 = 10 + 9\sqrt{-3}$

c) Wie können Sie daraus die sämtlichen Lösungen dieser Gleichungen bestimmen? (Eventuell notwendige Rechnungen müssen nicht durchgeführt werden.)

Aufgabe 2: (*12 Punkte*)

a) Das Polynom $x^2 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ verschwinde für $x = \sqrt{3}$. Welche Möglichkeiten gibt es für a und b?

b) Das Polynom $f(x) = x^{12} + a_{11}x^{11} + \cdots + a_1x + a_0$ mit a_i aus $\mathbb{Z}$ habe zehn ganzzahlige Nullstellen; die elfte ist $\sqrt{3}$. Was ist die zwölfte?

c) Finden Sie die sämtlichen Nullstellen des Polynoms $g = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$!

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 299 und 247 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

b) Beweisen Sie, daß es höchstens endlich viele Primzahlen p gibt, für die der ggT zweier Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ einen anderen Grad hat als der ggT der beiden Polynome $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[x]$!

c) Berechnen Sie für eine feste, aber beliebige ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ die Resultante der beiden Polynome $f = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + a$ und $g = x$, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 4: (*15 Punkte*)

a) Die Landau-Mignotte-Schranke des Polynoms $f \in \mathbb{Z}[x]$ sei M. Was bedeutet das für die Faktoren $g \in \mathbb{Z}[x]$ von f?

b) Sei $f = x^4 - 2x^3 - 2x + 15$. Die irreduziblen Faktoren von $f \bmod 23$ in $\mathbb{F}_{23}[x]$ sind $x^2 + 19x + 5$ und $x^2 + 2x + 3$. Was können Sie bereits ohne jede Rechnung über die irreduziblen Faktoren von $f \in \mathbb{Z}[x]$ und ihre Grade aussagen?

c) Die Landau-Mignotte-Schranke von f ist knapp 245; faktorisieren Sie f in $\mathbb{Z}[x]$! Brauchen Sie dazu unbedingt das Henselsche Lemma?

d) Falls Sie bei *c)* das Henselsche Lemma nicht benutzt haben: Welchen Ansatz würden Sie machen, um mit seiner Hilfe die Faktorisierung aus $\mathbb{F}_{23}[x]$ zu einer Faktorisierung modulo 23^2 hochzuheben? (Konkrete Rechnungen müssen nicht ausgeführt werden.)

Aufgabe 5: (*15 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Polynome $f = 4y - 2x - 3$ und $g = y^2 - 2y - 3$ bezüglich der lexikographischen Ordnung eine Gröbner-Basis des Ideals (f, g) in $\mathbb{Q}[x, y]$ bilden!

b) Machen Sie daraus eine reduzierte Gröbner-Basis!

c) Bestimmen Sie $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid f(x, y) = g(x, y) = 0\}$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 13. Dezember 2011, um 14.30 Uhr