

18. Mai 2020

## 11. Übungsblatt Computeralgebra

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Ideale  $I$  in  $\mathbb{Q}[X, Y]$  sowohl die Nullstellenmenge als auch Monome aus  $\mathbb{Q}[X, Y]$ , deren Restklassen eine Basis des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{Q}[X, Y]/I$  bilden:

- a)  $I = (X, Y)$
- b)  $I = (X^3 - X, Y^3 - Y)$

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß die angegebenen Erzeugendensysteme der beiden Ideale aus der vorigen Aufgabe bezüglich jeder beliebigen Mononomordnung GRÖBNER-Basen sind!
- b) Untersuchen Sie für beide Ideale, ob eine der Variablen separierend bezüglich  $V_{\mathbb{C}}(I)$  ist!
- c) Bestimmen Sie, falls dies nicht der Fall sein sollte, eine separierende Linearform in  $X$  und  $Y$ , und ersetzen Sie  $Y$  durch eine neue Variable  $Z$  derart, daß das Ideal eine GRÖBNER-Basis gemäß dem *Shape-Lemma* hat!
- d) Bestimmen Sie diese Basis!

### Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei  $f = 9X^2 + 16Y^2 - 144$ ,  $g = 25X^2 + 4(Y + 1)^2 - 100$  und  $I$  das von  $f$  und  $g$  erzeugte Ideal in  $\mathbb{Q}[X, Y]$ .

- a) Lassen Sie ein Computeralgebrasystem GRÖBNER-Basen von  $I$  bestimmen bezüglich der lexikographischen Ordnungen mit  $X > Y$  bzw.  $Y > X$  sowie auch der entsprechenden graduiert lexikographischen Ordnungen! In welchen Fällen hat diese Basis bezüglich einer der beiden Variablen die Form aus dem *Shape-Lemma*?
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer der berechneten GRÖBNER-Basen die Nullstellenmenge  $V_{\mathbb{C}}(I)$ !
- c) Interpretieren Sie die Nullstellenmenge geometrisch!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 28. Mai 2020, um 15.30 Uhr