Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515 B6, B4.18

*11. Mai 2020*

# 10. Übungsblatt Computeralgebra

**Aufgabe 1:** *(4 Punkte)*
Finden Sie eine Menge von Polynomen, die die getwistete kubische Kurve

$$C = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

als gemeinsame Nullstellenmenge haben! Ist hier $C$ die vollständige Nullstellenmenge?

**Aufgabe 2:** *(6 Punkte)*
Das Ideal $I$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ werde erzeugt von $f = X^2 + 2Y^2 - 3$ und $g = X^2 + XY + Y^2 - 3$.

*a)* Berechnen Sie die Durchschnitte $I \cap k[X]$ und $I \cap k[Y]$ !

*b)* Bestimmen Sie alle gemeinsamen Nullstellen von $f$ und $g$ in $\mathbb{R}^2$ !
Gröbner-*Basen können Sie von einen Computeralgebrasystem berechnen lassen.*

**Aufgabe 3:** *(7 Punkte)*
Finden Sie Ideale $I$ in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$, für die $V(I)$ gleich der angegebenen Teilmenge von $\mathbb{Q}^3$ ist:

*a)* $\{-1, 0, 1\} \times \{3, 5\} \times \{1, 2, 3\}$

*b)* $\{(-2, -1, 0),\ (-1, 0, 1),\ (0, 1, 2),\ (1, 2, 3),\ (2, 3, 4)\}$

*c)* $\{(3, 1, 4),\ (1, 5, 9),\ (2, 6, 5),\ (3, 5, 8)\}$

Etwa notwendige Gröbner-Basen sollten mit einem Computeralgebrasystem berechnet werden; mit alternativen Ansätzen läßt sich zumindest manchmal allerdings viel Arbeit sparen.

**Aufgabe 4:** *(3 Punkte)*

*a)* Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $f = X^2Y + 2XY^2 \in \mathbb{F}_3[X, Y]$ in $\mathbb{F}_3^2$ !

*b)* Nun sei $k$ ein unendlicher Körper, der $\mathbb{F}_3$ enthält. Zeigen Sie, daß $V_k(f)$ unendlich ist, und geben Sie diese Menge über Parameterdarstellung explizit an!

*c)* Nun sei $g = X^2 + 2Y^2$ und $K$ sei ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_3$. Bestimmen Sie $V_K(f, g)$ !
(Gröber-Basen werden für diese Aufgabe nicht benötigt.)

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 14. Mai 2020, um 15.30 Uhr