WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

30. April 2020

9. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die graduierte invers-lexikographische Ordnung tatächlich alle Forderungen an eine Monomordnung erfüllt!

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Wir gehen aus von einem linearen Gleichungssystem $\ell_i(x_1, \dots, x_n) = b_i$ für $i = 1, \dots, m$ über einem Körper k, betrachten die Linearformen ℓ_i als Elemente von $R = k[X_1, \dots, X_n]$, und setzen $I = (\ell_1 - b_1, \dots, \ell_m - b_m)$ in R. Wir arbeiten mit der lexikographischen Ordnung. Zeigen Sie:

a) Falls der Wert von x_i durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt ist, enthält jede GRÖBNER-Basis von I ein Polynom mit führendem Monom X_i. Gilt auch die Umkehrung?

b) Welche Möglichkeiten gibt es für die S-Polynome $S(\ell_i, \ell_j)$?

c) Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine GRÖBNER-Basis von I gibt, die für jedes i ein Polynom mit führendem Monom X_i enthält.

d) In diesem Fall enthält jede minimale GRÖBNER-Basis von I für jedes i genau ein Polynom mit führendem Term X_i.

e) Wie sieht die reduzierte GRÖBNER-Basis von I in diesem Fall aus?

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*

a) Konstruieren Sie (ohne Verwendung eingebauter Kommandos eines Computeralgebrasystems) die reduzierte GRÖBNER-Basis des Ideals
$$I = \left(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1,\ \ X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X,\ \ 2X - 3Y - Z\right)$$
des Polynomrings $k[X, Y, Z]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Folgen Sie dabei nicht streng dem BUCHBERGER-Algorithmus, sondern versuchen Sie soweit wie möglich zu optimieren.

b) Bestimmen Sie die Menge aller Tripel (x, y, z), die Nullstellen aller Polynome aus I sind!

c) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 7. Mai 2020, um 15.30 Uhr