Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

24. April 2020

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Ordnen Sie die Terme des Polynoms

$$f = 5X^4YZ + 7X^2Y^2Z^2 + 9Y^4Z^2 + 11X^3Y^3 + 13X^5 + 15X^3Z^3 \in \mathbb{Q}[X,Y,Z]$$

der Größe nach

a) für die lexikographische Ordnung
b) für die graduiert lexikographische Ordnung
c) für die invers lexikographische Ordnung
d) für die graduiert invers lexikographische Ordnung!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Im Polynomring $\mathbb{Q}[X,Y]$ sei

$$f = X^2Y^4 + Y^8 + X^3Y^2 - Y^2 - 6X, \quad f_1 = XY - 2 \quad \text{und} \quad f_2 = Y^3 - 1\,.$$

a) Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von f durch f_1, f_2 bezüglich der lexikographischen Ordnung!
b) Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von f durch f_2, f_1 bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung!
c) Liegt f im von f_1 und f_2 erzeugten Ideal von $\mathbb{Q}[X,Y]$?

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Das Ideal I von $\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_n]$ habe die Eigenschaft, daß es mit jedem $f \in I$ auch alle in f vorkommenden Monome enthält. Zeigen Sie: I ist ein monomiales Ideal!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
$\mathcal{M}$ sei eine nichtleere Menge von Idealen des Polynomrings $k[X_1,\dots,X_n]$ über einem Körper k. Zeigen Sie, daß es in $\mathcal{M}$ ein maximales Element I gibt, d.h. ein Ideal I, das in keinem Ideal $J \in \mathcal{M}$ echt enthalten ist!
Hinweis: Zeigen Sie, daß es sonst eine unendliche echt aufsteigende Folge von Idealen gäbe, und wenden Sie den Hilbert*schen Basissatz an auf die Vereinigung dieser Ideale.*

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*
Die Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ erfülle die ersten beiden Bedingungen an eine Monomordnung und zusätzlich gelte, daß $(0,\dots,0)$ das kleinste Element von $\mathbb{N}_0$ ist.

a) Zeigen Sie: Ist X^α ein Teiler von X^β, so ist $X^\alpha \le X^\beta$ im Sinne dieser Ordnung.
b) Folgern Sie aus dem Lemma von Dickson, daß $<$ eine Monomordnung ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 30. April 2020, um 15.30 Uhr