Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 B6, B4.18

2. April 2020

7. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Konstruieren Sie zwei teilerfremde Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[X, Y]$ mit der Eigenschaft, daß $f(x, Y)$ und $g(x, Y)$ für alle $x \in \{-1, 0, 1\}$ einen ggT positiven Grades haben!

Lösung: Das Polynom $(X+1)X(X-1) = X^3 - X$ verschwindet für alle $x \in \{-1, 0, 1\}$; ein einfaches Beispiel ist somit $f = Y$ und $g = X^3 - X + Y$. Für $x \in \{-1, 0, 1\}$ ist

$$g(x, Y) = Y = f(x, Y) ,$$

also haben $f(x, Y)$ und $g(x, Y)$ den ggT Y, während f und g natürlich teilerfremd sind, da Y kein Teiler von g ist,

b) Konstruieren Sie zwei teilerfremde Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[X, Y]$, die modulo jeder einstelligen Primzahl einen ggT positiven Grades haben!

Lösung: Hier können wir genauso vorgehen: Das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ der vier einstelligen Primzahlen verschwindet modulo jeder dieser Primzahlen, also können zum Beispiel $f = X^2 + Y^2$ und $g = X^2 + Y^2 + 210$ nehmen. $f = XY - 100$ und $g = XY + 110$ wäre natürlich auch eine der vielen Möglichkeiten.

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) Gegeben sei ein System von vier Gleichungen in vier Veränderlichen. Aus wie vielen Gleichungen besteht das System der Gleichungen in drei Veränderlichen, auf das man es mit der Resultantenmethode zurückführt?

Lösung: Bei vier Gleichungen gibt es $\binom{4}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ Paare aus zwei verschiedenen Gleichungen; da man für jedes dieser Paare die Resultante bilden muß, entstehen sechs Gleichungen in drei Variablen.

b) Wie viele Gleichungen in zwei Veränderlichen muß man betrachten, um dieses System zu lösen?

Lösung: Jetzt gibt es $\binom{6}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$ Paare und damit auch fünfzehn Gleichungen.

c) Wie viele Polynome in einer Veränderlichen erhält man beim Versuch, dieses zu lösen?

Lösung: $\binom{15}{2} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 = 105$ Paare von Gleichungen ergeben 105 Polynome.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Die Resultantenmethode funktioniert grundsätzlich unabhängig vom Grad der Gleichungen, d.h. also auch für lineare Gleichungssysteme. Wie sehen hier die Resultanten aus, und welche Vereinfachung bietet sich an, um den in der vorigen Aufgabe beobachteten rasanten Anstieg der Gleichungsanzahl zu beschränken?

Lösung: Faßt man ein lineares Polynom in $X_1, \dots, X_n$ auf als Polynom in X_1 über $k[X_2, \dots, X_n]$, hat sie die Form $aX_1 + g$ mit $a \in k$ und einem linearen Polynom g in $X_2, \dots, X_n$. Zwei solche Polynome $aX_1 + g$ und $a'X_1 + g'$ haben genau dann einen gemeinsamen Faktor positiven Grades, wenn sie zueinander proportional sind. Deshalb gilt hier: Wenn $aX_1 + g$ und $a'X_1 + g'$ einen Faktor positiven Grades gemeinsam haben und auch $aX_1 + g$ und $a''X_1 + g''$, so haben auch $a'X_1 + b'$ und $a''X_1 + b''$ diesen Faktor gemeinsam. Deshalb muß hier nicht die Resultante zu jedem Paar aus zwei Gleichungen gebildet werden, sondern es reicht, eine Gleichung auszuwählen, in der X_1 wirklich vorkommt, und die Resultante dieses Polynoms mit allen anderen zu bilden. Auf diese Weise entstehen aus m Gleichungen in n Veränderlichen nur $m-1$ Gleichungen in $n-1$ Veränderlichen statt $\binom{m}{2}$.

Die Resultante von $aX_1 + g$ und $a'X_1 + g'$ ist $\begin{vmatrix} a & g \\ a' & g' \end{vmatrix} = ag' - a'g$; sie ist also bis auf einen konstanten Faktor genau das, was eine GAUSS-Elimination ergeben hätte.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \quad \text{und} \quad x^2 + 4x + 3y^2 - 18y = -22$$

mit Hilfe einer Resultante exakt, und bestimmen Sie angenäherte numerische Werte ihrer Lösungen!

Lösung: Wir schreiben die zugehörigen Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$, deren gemeinsame Nullstellen wir suchen, als Polynome in Y über $k[X]$:

$$f = Y^2 - 6Y + (X^2 - 4X - 12) \quad \text{und} \quad g = 3Y^2 - 18Y + (X^2 + 4X + 22)$$

Ihre Resultante ist $\begin{vmatrix} 1 & -6 & X^2 - 4X - 12 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & X^2 - 4X - 12 \\ 3 & -18 & X^2 + 4X + 22 & 0 \\ 0 & 3 & -18 & X^2 + 4X + 22 \end{vmatrix}$.

Subtrahieren wir dreimal die erste Zeile von der dritten und dreimal die zweite von der vierten, vereinfacht sich die Determinante zu

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & X^2 - 4X - 12 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & X^2 - 4X - 12 \\ 0 & 0 & -2X^2 + 16X + 58 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & -2X^2 + 16X + 58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & X^2 + 4X - 12 \\ 0 & -2X^2 + 16X + 58 & 0 \\ 0 & 0 & -2X^2 + 16X + 58 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist einfach das Produkt der Diagonalelemente, also

$$(-2X^2 + 16X + 58)^2 = 4(X^2 - 8X - 29)^2 .$$

Da $X^2-8X-29=(X-4)^2-45$ ist, sind die Nullstellen $4\pm\sqrt{45}=4\pm3\sqrt{5}$. Die numerischen Werte liegen bei 10,70820393 und 2,708203931. Einsetzen von $x=4+3\sqrt{5}$ in f ergibt

$$f(4+3\sqrt{5},Y)=Y^2-6Y+16+24\sqrt{5}+45-16-12\sqrt{5}-12=Y^2-6Y+33+12\sqrt{5}\,;$$

entsprechend ist

$$g(4+3\sqrt{5},Y)=3Y^2-18Y+16+24\sqrt{5}+45+16+12\sqrt{5}+22=3Y^2-18Y+99+36\sqrt{5}\,,$$

was offensichtlich genau das Dreifache des obigen Polynoms ist. Es reicht daher, eine der beiden Gleichungen zu lösen;

$$Y^2-6Y+33+12\sqrt{5}=(Y-3)^2+27+12\sqrt{5}$$

hat offensichtlich keine reelle Nullstelle.
Mit $x=4-5\sqrt{3}$ erhalten wir

$$f(4-3\sqrt{5},Y)=Y^2-6Y+16-24\sqrt{5}+45-16s+-12\sqrt{5}-12=Y^2-6Y+33-12\sqrt{5}\,;$$

und

$$g(4-3\sqrt{5},Y)=3Y^2-18Y+16-24\sqrt{5}+45+16-12\sqrt{5}+22=3Y^2-18Y+99-36\sqrt{5}\,,$$

was wieder das Dreifache des anderen Polynoms ist. Nun ist

$$Y^2-6Y+33-12\sqrt{5}=(Y-3)^2+24-12\sqrt{5}\,;$$

da das Quadrat von $12\sqrt{5}$ gleich $12^2\cdot5$ ist, das von 24 aber nur $12^2\cdot4$, ist der konstante Term negativ, und wir erhalten die Lösungen

$$y_{1/2}=3\pm\sqrt{12\sqrt{5}-24}=3\pm2\sqrt{3\sqrt{5}-6}\,;$$

die numerischen Werte liegen bei 4,683097063 und 1,316902937.
Es gibt also genau zwei reelle Lösungen, nämlich die Punkte

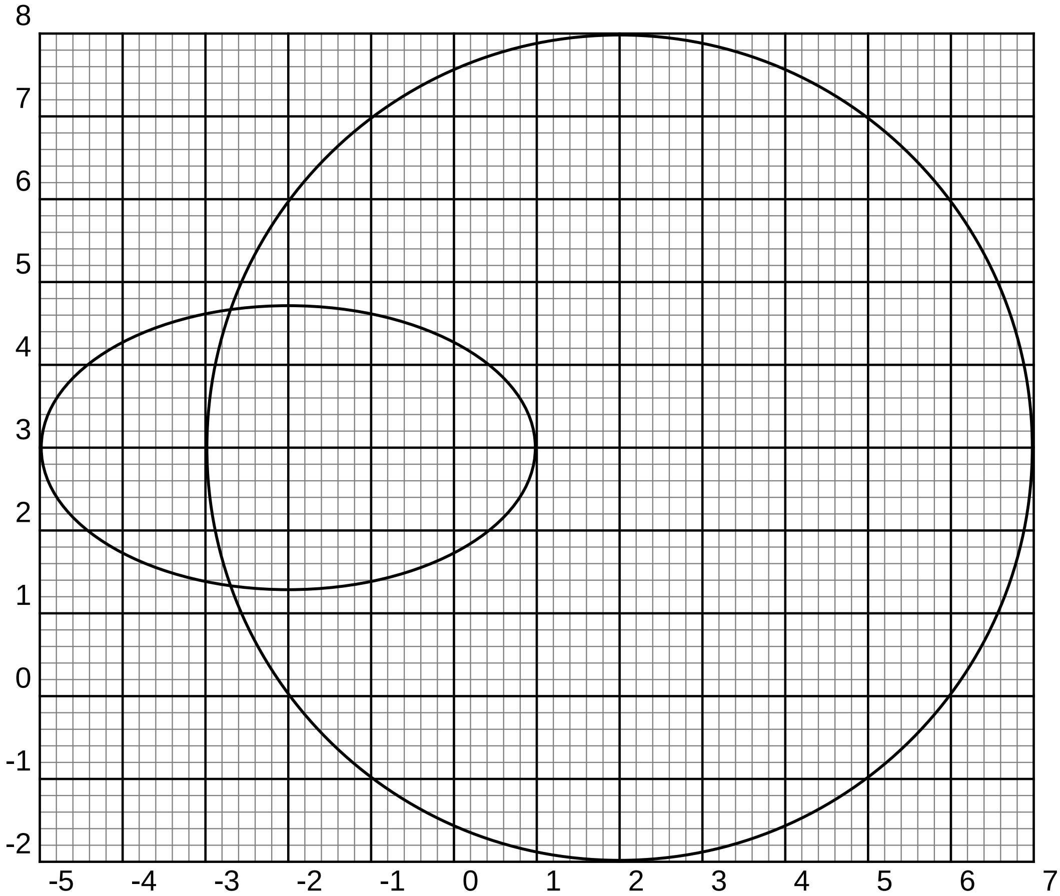
$$\left(4-3\sqrt{5},3\pm2\sqrt{3\sqrt{5}-6}\right).$$

Numerisch sind sie ungefähr gleich

$$(\text{-}2{,}708203931, 4{,}683097063) \quad \text{und} \quad (\text{-}2{,}708203931, 1{,}316902937)\,.$$

b) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der beiden Gleichungen und vergleichen Sie Ihre Zeichnung mit dem Rechenergebnis!

Lösung: $x^2-4x+y^2-6y-12=(x-2)^2+(y-3)^2-25$; die Nullstellenmenge der ersten Gleichung ist also ein Kreis mit Radius fünf um den Punkt $(2,3)$.
$x^2+4x+3y^2-18y+22=(x+2)^2+3(y-3)^2-9$; diese Gleichung beschreibt eine Ellipse um $(-2,3)$ mit Halbachsen der Längen drei und $\sqrt{3}$. Die Zeichnung auf der nächsten Seite zeigt, daß die Schnittpunkte zu den berechneten reellen Lösungen passen.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7