Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 B6, B4.18

26. März 2020

6. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

k sei ein Körper, und $f, g \in k[X]$ seien zwei Polynome. Zeigen Sie:

a) f und g sind genau dann teilerfremd, wenn es zwei Polynome $a, b \in k[X]$ gibt mit

$$af + bg = 1 \quad \text{und} \quad \deg a < \deg g\,.$$

b) In diesem Fall sind a und b eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ den ggT der beiden Polynome $f = 2X^2+3X+5$ und $g = 3X^2+5X+7$, und stellen Sie ihn als Linearkombination dieser Polynome dar!

b) Was ist der ggT h von f und g in $\mathbb{Z}[X]$?

c) Zeigen Sie, daß es keine Polynome $a, b \in \mathbb{Z}[X]$ gibt, für die $af + bg = h$ ist!

d) Zeigen Sie, daß es auch keine Polynome $a, b \in \mathbb{Z}[X]$ gibt, für die $af + bg \equiv h \bmod 5$ ist!

e) Finden Sie Polynome $a, b \in \mathbb{Z}[X]$, für die $af + bg \equiv h \bmod 7$ ist!

f) Finden Sie Polynome $a, b \in \mathbb{Z}[X]$, für die $af + bg \equiv h \bmod 49$ ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Welche der folgenden Mengen sind Ideale im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$?

a) $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ *b)* $\mathbb{Q}[X]$ *c)* $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$ *d)* $\left\{ f \in \mathbb{Q}[X, Y, Z] \;\middle|\; f(1, 2, 3) = 0 \right\}$

e) $\left\{ f = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i \;\middle|\; d \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \sum\limits_{i=0}^{d} a_i \text{ gerade} \right\}$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

Schreiben Sie das Polynom $f = X^3 + 2XYZ - Y^2Z$ um als ein Polynom in $X, Y-1$ und $Z+2$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. April 2020, um 15.30 Uhr