WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

19. März 2020

5. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Fassen Sie das Polynom $f = X^2Y^2 + X^3Y + XY^3 + 2X^2 + XY$ aus $\mathbb{Z}[X,Y]$ einmal auf als Polynom in Y mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[X]$ und einmal als Polynom in X mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[Y]$, und berechnen Sie in beiden Fällen den Inhalt sowie den primitiven Anteil!

Lösung: Nach Y-Potenzen sortiert ist $f = XY^3 + X^2Y^2 + XY + 2X^2$; alle Koeffizienten sind entweder X oder X^2, ihr ggT und damit der Inhalt ist also X. Somit ist

$$f = X \cdot (Y^3 + XY^2 + Y + 2X)\,,$$

wobei das Polynom in der Klammer der primitive Anteil ist.
Nach X-Potenzen sortiert ist $f = (Y^2 + 2)X^2 + (Y^3 + Y)X$; die beiden Koeffizienten sind teilerfremd, denn $Y^2 + 2$ hat $\pm\sqrt{-2}$ als Nullstellen, während $Y^3 + Y$ an den Stellen Null und $\pm i$ verschwindet. Somit ist der Inhalt gleich eins, und das Polynom ist (als Polynom in X) primitiv.

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*
Berechnen Sie den ggT der beiden Polynome

$$f = 2Y^4 + X^2Y^3 + 2XY^2 + 3X^3Y + X^5 \quad \text{und} \quad g = 2Y^3 + X^2Y^2 + 2X^2Y - 2XY + X^4 - X^3$$

in $\mathbb{Z}[X,Y]$!

Lösung: Wir betrachten f und g als Polynome in Y mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[X]$. Die führenden Koeffizienten sind dann jeweils zwei, haben also keine Nullstellen. Außerdem sind beide primitiv.
Wir beginnen mit der Spezialisierung $x = 0$: $f(0,Y) = 2Y^4$ und $g(0,Y) = 2Y^3$; der ggT ist also $2Y^3$.
Für $x = 1$ ist $f(1,Y) = 2Y^4 + Y^3 + 2Y^2 + 3Y + 1$ und $g(1,Y) = 2Y^3 + Y^2 = Y^2(2Y+1)$. Da Y^2 offensichtlich kein Teiler von $f(1,Y)$ ist, kommt höchstens $2Y+1$ als ggT positiven Grades in Frage, und in der Tat ist $f(1,-1/2) = 0$, so daß dies der ggT ist. Da wir für $x = 0$ einen ggT vom Grad drei hatten, jetzt aber einen vom Grad eins, muß das Problem bei $x = 0$ schlechte Reduktion haben; wir müssen den dort berechneten ggT also ignorieren.
Für $x = -1$ ist $f(-1,Y) = 2Y^4 + Y^3 - 2Y^2 - 3Y - 1$ und $g(-1,Y) = 2Y^3 + Y^2 + 4Y + 2$. Hier können wir den ggT nicht mehr so einfach sehen und müßten eigentlich einen der Algorithmen zur ggT-Berechnung für Polynome in einer Veränderlichen mit ganzzahligen Veränderlichen anwenden. Zum Glück gibt es hier aber eine Alternative: Da der ggT von $f(1,Y)$ und $g(1,Y)$ ein lineares Polynom ist, hat der ggT von f und g höchstens den Y-Grad eins. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$, bei dem das Problem keine schlechte Reduktion hat, ist daher der ggT von $f(x,Y)$ und $g(x,Y)$ entweder ein lineares Polynom oder eins. Da der Koeffizient der höchsten Y-Potenz von $f(x,Y)$ und $g(x,Y)$ unabhängig von x immer zwei ist, ist dieses entweder von der Form $X+c$ oder $2X+c$ mit $c \in \mathbb{Z}$. Einen gemeinsamen Teiler dieser Form können wir finden, indem wir testen, ob $f(x,Y)$ und $g(x,Y)$ eine gemeinsame ganz- oder halbzahlige Nullstelle haben. Es lohnt sich daher, zumindest einige betragskleine solche Zahlen zu testen.

Hier bei $x = -1$ sind 0 und $\frac{1}{2}$ keine Nullstellen von $f(-1, Y)$, aber $-\frac{1}{2}$ ist eine, und auch $g(-1, -\frac{1}{2})$ verschwindet. Somit ist $2Y + 1$ ein gemeinsamer Faktor von $f(-1, Y)$ und $g(-1, Y)$, auch wenn wir nicht sicher sein können, daß es der volle ggT ist.

$f(2, Y) = 2Y^4 + 4Y^3 + 4Y^2 + 24Y + 32$ und $g(2, Y) = 2Y^3 + 4Y^2 + 4Y + 8$. Nach VIÈTE ist das Produkt aller Nullstellen $32/2 = 16$ *bzw.* $8/2 = 4$, es lohnt sich also, zunächst ± 1 und ± 2 zu testen. In beiden Fällen ist -2 eine Nullstelle, und beide Polynome sind nicht nur durch $Y + 2$ teilbar, sondern auch durch $2Y + 4$.

Bei $f(-2, Y) = 2Y^4 + 4Y^3 - 4Y^2 - 24Y - 32$ und $g(-2, Y) = 2Y^3 + 4Y^2 + 12Y + 24$ ist die Situation ähnlich; wieder ist -2 eine gemeinsame Nullstelle, und beide Polynome sind durch $2Y + 4$ teilbar.

Damit haben wir für $x = \pm 1$ das Polynom $2Y + 1$ als gemeinsamen Teiler und zumindest für $x = 1$ sogar als ggT; für $x = \pm 2$ ist $2Y + 4$ ein gemeinsamer Teiler. Dies legt die Vermutung nahe, daß $2Y + X^2$ ein gemeinsamer Teiler von f und g sein könnte. In der Tat ist

$$f = (2Y + X^2)(X^3 + XY + Y^3) \quad \text{und} \quad g = (2Y + X^2)(X^2 - X + Y^2)\,.$$

Da der ggT im Falle $x = 1$ linear in Y ist, kann auch der von f und g keinen größeren Y-Grad haben, d.h. $\operatorname{ggT}(f, g) = 2Y + X^2$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die beiden Polynome $f = X^5 + Y^5 + Z^5 + W^5$ und $g = X^4 + Y^4 + Z^4 + W^4$ aus $\mathbb{Z}[X, Y, Z, W]$ teilerfremd sind!

Lösung: Dazu reicht es, Werte y_0, z_0, w_0 für die Variablen Y, Z, W zu finden mit der Eigenschaft, daß $f(X, y_0, z_0, w_0)$ und $g(X, y_0, z_0, w_0)$ in $\mathbb{Z}[X]$ teilerfremd sind. Für die Wahl $y_0 = z_0 = w_0 = 1$ erhalten wir die beiden Polynome $X^5 + 3$ und $X^4 + 3$, die offensichtlich teilerfremd in $\mathbb{C}[X]$ sind, da ihre (komplexen) Nullstellen für $X^5 + 3$ alle den Betrag $\sqrt[5]{3}$ haben, für $X^4 + 3$ aber $\sqrt[4]{3}$. Damit sind sie erst recht teilerfremd in $\mathbb{Q}[X]$, und da beide primitiv sind auch in $\mathbb{Z}[X]$.

b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $p = 10X^3 + 5Y^3 + 20Z^3$ und $q = 15X^2 + 5Y^2 + 25Z^2$ in $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$!

Lösung: Alle Koeffizienten sind durch fünf teilbar; $p = 5p^*$ mit $p^* = 2X^3 + Y^3 + 4Z^3$ und $q = 5q^*$ mit $q^* = 3X^2 + Y^2 + 5Z^2$. $p^*(X, 1, 0) = 2X^3 + 1$ hat als komplexe Nullstellen die drei dritten Wurzeln von $-\frac{1}{2}$, während $q^*(X, 1, 0) = 3X^2 + 1$ die Nullstellen $\pm i/\sqrt{3}$ hat. Also sind diese beiden Polynome teilerfremd in $\mathbb{Z}[X]$ und damit sind auch p^* und q^* teilerfremd in $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$. Der ggT von p und q ist somit gleich dem ggT fünf der Inhalte.