Wolfgang K. Seiler — B6, B4.18
Tel. 2515

6. März 2020

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die beiden Polynome $f = X^6 + 4X^5 + 9X^4 + 16X^3 + 25X^2 + 36X + 49$ und $g = 2X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 11X + 13$ aus $\mathbb{Z}[X]$ die Resultante von $f \bmod 2$ und $g \bmod 2$!

b) Was ist der ggT von f und g in $\mathbb{Z}[X]$?

c) Geben Sie eine obere Schranke für $|\mathrm{Res}_X(f, g)|$ an!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Inhalte der beiden Polynome

$$f = 12X^5 + 90X^4 + 78X^2 + 18X + 36 \quad \text{und} \quad g = (15X - 5)(12X - 24)$$

aus $\mathbb{Z}[X]$!

b) Was sind die primitiven Anteile f^* und g^* von f und g?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(f^*, g^*)$!

d) Was ist $\mathrm{ggT}(f, g)$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Betrachten Sie $f = X^2Y^3 + X^2Y + X^2 + 2XY^3 + X + Y^3 - Y - 2$ als Polynom in Y über $\mathbb{Z}[X]$ und berechnen Sie den Inhalt und den primitiven Anteil von f!

b) Betrachten Sie f nun als Polynom in X über $\mathbb{Z}[Y]$, und berechnen Sie wieder Inhalt und primitiven Anteil!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Die beiden Polynome $f, g \in k[X, Y]$ seien aufgefaßt als Polynome in Y über $k[X]$. Zeigen Sie:

a) Wenn $\deg \mathrm{ggT}\big(f(x, Y), g(x, Y)\big) < \deg_Y \mathrm{ggT}(f, g)$ für ein $x \in k$, so ist x eine Nullstelle sowohl des führenden Koeffizienten von f als auch des führenden Koeffizienten von g.

b) Es gibt höchstens endlich viele $x \in k$, für die $\deg \mathrm{ggT}\big(f(x, Y), g(x, Y)\big) > \deg_Y \mathrm{ggT}(f, g)$ ist.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 12. März 2020, um 15.30 Uhr