Wolfgang K. Seiler B6, B4.18
Tel. 2515

28. Februar 2020

2. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = X^3 + X^2 + 1$ und $g = X^2 + X + 1$ aus $\mathbb{Z}[X]$!

Lösung:

$$\operatorname{Res}_X(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\,,$$

wie man z.B. durch Entwickeln nach der ersten Spalte nachrechnen kann.

b) Was ist der ggT von f und g in $\mathbb{Z}[X]$?

Lösung: Da die Resultante nicht verschwindet, haben f und g keinen gemeinsamen Faktor positiven Grades. Sie sind auch durch keine ganze Zahl außer ± 1 teilbar; daher ist der ggT gleich eins.

c) Für welche Primzahlen p haben f mod p und g mod p in $\mathbb{F}_p[X]$ einen gemeinsamen Teiler mit einem größeren Grad als $\deg \operatorname{ggT}(f, g)$, und wie sieht der aus?

Lösung: Modulo 3 verschwindet die Resultante; in $\mathbb{F}_3[X]$ haben also f mod 3 und g mod 3 einen gemeinsamen Teiler positiven Grades. In der Tat verschwinden beide an der Stelle eins. Im Falle von g ist das eine doppelte Nullstelle, da auch $g'(1) = 2 + 1 = 0$ ist, aber $f'(1) = 3 + 2 = 2 \neq 0$. Somit ist der ggT gleich $X - 1$, was wir auch als $X + 2$ schreiben können.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = X^2 + pX + q$ und $g = X - a$ aus $\mathbb{R}[X]$, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung:

$$\operatorname{Res}_X(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = a^2 + pa + q\,.$$

$X^2 + pX + q$ und $X - a$ haben also genau dann einen gemeinsamen Faktor positiven Grades, wenn $a^2 + pa + q$ verschwindet. Da als Faktor nur $X - a$ in Frage kommt, und das genau dann ein Teiler von $X^2 + pX + q$ ist, wenn a eine Nullstelle dieses Polynoms ist, war das auch ohne Resultantenberechnung klar.

b) Berechnen Sie die Resultante von f und f'!

Lösung: $f' = 2X + p$; somit ist $\mathrm{Res}_X(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix} = 4q - p^2$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Welche Bedingung müssen die Parameter p und q erfüllen, damit das Polynom $f = X^3 + pX + q$ eine mehrfache Nullstelle hat?

Lösung: Ist z eine mehrfache Nullstelle, so ist $X - z$ ein gemeinsamer Faktor von f und f'. Haben umgekehrt f und f' einen gemeinsamen Faktor positiven Grades, so haben sie falls dieser linear ist eine gemeinsame Nullstelle, Falls er quadratisch ist, ist f' ein Teiler von f, d.h. jede Nullstelle von f' ist auch Nullstelle von f mit Vielfachheit mindestens zwei. Da f mit Vielfachheiten gezählt in keinem Körper mehr als drei Nullstellen haben kann, hat f dann also eine dreifache Nullstelle, die doppelte Nullstelle von f' ist.

f und f' haben einen gemeinsamen Faktor positiven Grades genau dann, wenn

$$\mathrm{Res}_X(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2$$

verschwindet.

b) Was muß gelten, damit die Gleichung $X^3 + pX + q = 0$ sogar eine dreifache Nullstelle hat?

Lösung: Nach Viète ist die Summe aller Nullstellen gleich dem Negativen des Koeffizienten von X^2. Im Falle einer dreifachen Nullstelle muß hier also deren Dreifaches verschwinden, d.h. nur die Null kommt als dreifache Nullstelle in Frage. Dann ist das Polynom gleich X^3, die Bedingung ist also $p = q = 0$.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Fassen Sie die Polynome $f = X^2Y + XY + 1$ und $g = X^2Y + X + 1$ einmal auf als Polynome in X über $\mathbb{R}[Y]$ und einmal als Polynome in Y über $\mathbb{R}[X]$, und berechnen Sie so die beiden Resultanten $\mathrm{Res}_X(f, g)$ und $\mathrm{Res}_Y(f, g)$!

Lösung:

$$\mathrm{Res}_X(f, g) = \begin{vmatrix} Y & Y & 1 & 0 \\ 0 & Y & Y & 1 \\ Y & 1 & 1 & 0 \\ 0 & Y & 1 & 1 \end{vmatrix} = Y^3 - 2Y^2 + Y, \quad \mathrm{Res}_X(f, g) = \begin{vmatrix} X^2 + X & 1 \\ X^2 & X + 1 \end{vmatrix} = X^3 + X^2 + X$$

b) Bestimmen Sie (ohne Resultanten) alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

Lösung: $f - g = XY - X = X(Y - 1)$; ist $f(x, y) = g(x, y) = 0$, so muß also x verschwinden oder $y = 1$ sein. $f(0, y) = 1$ verschwindet für kein y, und $f(x, 1) = x^2 + x + 1$ verschwindet nur für zwei konjugiert komplexe Zahlen. Somit gibt es keine reelle Lösung.