Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

8. Januar 2018

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon R \to S$ ein Homomorphismus zwischen den kommutativen Ringen R und S, so ist $\operatorname{Kern}\varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$ ein Ideal von R.

b) Welche der folgenden Mengen sind Ideale in $\mathbb{Z}[X]$? (Bei den angegebenen Polynomen soll stets d beliebig und außer für $d = 0$ soll auch $a_d \neq 0$ sein.)

$$M_1 = \mathbb{Z},\quad M_2 = 2\mathbb{Z},\quad M_3 = \mathbb{Z}[X],\quad M_4 = \mathbb{Z}[X^2],\quad M_5 = \bigl\{f \in \mathbb{Z}[X] \bigm| f(5) = 0\bigr\},$$
$$M_6 = \bigl\{f \in \mathbb{Z}[X] \bigm| f(5) = 1\bigr\},\quad M_7 = \bigl\{f \in \mathbb{Z}[X] \bigm| f(\sqrt{5}) = 0\bigr\},$$
$$M_8 = \left\{\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i = 0\right\},\quad M_9 = \left\{\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} 2^i a_i = 0\right\}$$

c) Geben Sie in allen Fällen, in denen M_i ein Ideal ist, ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von M_i an!

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)

Welche der folgenden Vorschriften definiert eine Monomordnung auf $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$?

a) $X^aY^bZ^c >_1 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ falls $c > \gamma$ oder $c = \gamma$ und $b > \beta$ oder $c = \gamma$, $b = \beta$ und $a > \alpha$

b) $X^aY^bZ^c >_2 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ falls $a+2b+3c > \alpha+2\beta+3\gamma$ oder $a+2b+3c = \alpha+2\beta+3\gamma$ und $X^aY^bZ^c >_1 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$

c) $X^aY^bZ^c >_3 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ falls $a+2b+3c > \alpha+2\beta+3\gamma$ oder $a+2b+3c = \alpha+2\beta+3\gamma$ und $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma >_1 X^aY^bZ^c$

d) $X^aY^bZ^c >_4 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ falls $a-2b+3c > \alpha-2\beta+3\gamma$ oder $a-2b+3c = \alpha-2\beta+3\gamma$ und $X^aY^bZ^c >_1 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$

e) $X^aY^bZ^c >_5 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ falls $abc > \alpha\beta\gamma$ oder $abc = \alpha\beta\gamma$ und $X^aY^bZ^c >_1 X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

a) Dividieren Sie in $\mathbb{Q}[X, Y]$ das Polynom $f = X^3Y^2 + 2X^3Y + 3X^2Y^3 + 4XY - 6Y + 3X - 9$ bezüglich der lexikographischen Ordnung durch die beiden Polynome $g = X^2 + 1$ und $h = Y + 1$!

b) Können Sie sicher entscheiden, ob f im von g und h erzeugten Ideal liegt?

c) Bestimmen Sie $V_{\mathbb{C}}(f, g, h)$!

• • • BITTE WENDEN! • • •

Aufgabe 4: *(15 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Nullstellenmengen $V_{\mathbb{R}}(f)$ und $V_{\mathbb{R}}(g)$ der beiden Polynome

$$f = X^2 + Y^2 - 4Y - 12 \quad \text{und} \quad X^2 + Y^2 - 2X - 8$$

geometrisch!

b) Zeigen Sie, daß die führenden Terme von f und g bezüglich jeder Monomordnung übereinstimmen!

c) Bilden f und g bezüglich irgendeiner Monomordnung eine GRÖBNER-Basis des Ideals $I = (f, g)$?

d) Finden Sie ein lineares Polynom $h \in \mathbb{Q}[X, Y]$, das auf ganz $V_{\mathbb{C}}(f, g)$ verschwindet!

e) Finden Sie in $I = (f, g)$ nichttriviale Polynome $p \in \mathbb{Q}[X]$ und $q \in \mathbb{Q}[Y]$!

f) Ist $I = (p, q)$?

g) Zeigen Sie, daß die Polynome h und q eine reduzierte GRÖBNER-Basis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung bilden!

h) Hat diese Basis eine Gestalt gemäß dem Shape-Lemma?

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Besteht das Polynom $q \in k[X_1, \ldots, X_n]$ nur aus einem Monom und ist der führende Term von $p \in k[X_1, \ldots, X_n]$ teilerfremd zu diesem Monom, so läßt sich $S(p, q)$ mit dem Divisionsalgorithmus bezüglich q und p auf Null reduzieren.

b) Bestimmen Sie möglichst einfach alle komplexen Nullstellen des von $f = X^2 + 2XY + Y^2$ und $g = Y^2 - 2XY + X^2$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ erzeugten Ideals I !

c) Bestimmen Sie das Radikal von I !

d) Finden Sie eine GRÖBNER-Basis von $\sqrt{I}$!

e) Wenden Sie den BUCHBERGER-Algorithmus an, um eine GRÖBNER-Basis von I bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung zu bestimmen!

f) Bestimmen Sie die reduzierte GRÖBNER-Basis dazu!

g) Bestimmen Sie die Vielfachheiten der Nullstellen aus $V_{\mathbb{C}}(I)$!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Welche Nullstellen hat das Polynom $f = X^4 - X^3 - 5X^2 + 3X + 6$, und welche Vielfachheiten haben sie?

b) Das Polynom $g = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1$ wurde so konstruiert, daß es nur ganzzahlige Nullstellen hat. Bestimmen Sie diese sowie auch ihre Vielfachheiten, und finden Sie ein quadratfreies Polynom, das die gleichen Nullstellen hat!

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Finden Sie eine separierende Linearform für $\{(0, 2), (-1, 1), (1, 1), (-2, 0), (0, 0), (2, 0)\}$!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

a) Für welche reellen Zahlen p haben die beiden quadratischen Gleichungen $x^2 + px + 1 = 0$ und $x^2 + x + p = 0$ mindestens eine gemeinsame Lösung?

b) Wie viele gemeinsame Lösungen haben sie für diese Werte von p jeweils?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 8. Januar 2018, um 12.00 Uhr