Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

18. Dezember 2017

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)

a) Welche Bedingungen muß eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines Rings erfüllen, um ein Ideal zu sein?

b) Welche der folgenden Mengen sind Ideale in $\mathbb{R}[X]$? (Bei den angegebenen Polynomen soll stets d beliebig und $a_d \neq 0$ sein.)

$$M_1 = \mathbb{Z},\quad M_2 = \mathbb{Q},\quad M_3 = \mathbb{R},\quad M_4 = \mathbb{C},\quad M_5 = \left\{ f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = 0 \right\}$$

$$M_6 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i = 0 \right\},\quad M_7 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i = 1 \right\}$$

$$M_8 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} (-1)^i a_i = 0 \right\},\quad M_9 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; a_0 = 0 \right\}$$

c) Geben Sie in allen Fällen, in denen M_i ein Ideal ist, ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von M_i an!

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)

a) Welche Bedingungen muß eine Monomordnung auf $k[X_1, \dots, X_n]$ erfüllen?

b) Zeigen Sie: Ist $>$ eine Monomordnung auf $k[X_1, \dots X_n]$, und ist $X_i > X_j$, so ist auch $X_i^n > X_j^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: (*11 Punkte*)

a) Beschreiben Sie die Nullstellenmengen $V_{\mathbb{R}}(f)$ und $V_{\mathbb{R}}(g)$ der beiden Polynome

$$f = X^2 + Y^2 - 6X - 8 \quad \text{und} \quad X^2 + Y^2 - 6Y - 8$$

geometrisch!

b) Finden Sie Ideale I, J in $\mathbb{Q}[X, Y]$, so daß $V_{\mathbb{C}}(I) = V_{\mathbb{C}}(f) \cap V_{\mathbb{C}}(g)$ und $V_{\mathbb{C}}(J) = V_{\mathbb{C}}(f) \cup V_{\mathbb{C}}(g)$ ist, und geben Sie jeweils Erzeugendensysteme dafür an!

c) Finden Sie ein Hauptideal von $\mathbb{R}[X, Y]$, dessen Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ gleich $V_{\mathbb{R}}(f) \cap V_{\mathbb{R}}(g)$ ist!

d) Finden Sie eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch alle gemeinsamen Nullstellen von f und g geht, sowie auch ein Polynom $h \in \mathbb{Q}[Y]$ aus I mit möglichst kleinem Grad!

e) Zeigen Sie, daß das Polynom h zusammen mit der Gleichung der gefundenen Geraden eine reduzierte Gröbner-Basis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung bildet!

f) Analog gibt es ein Polynom $h^* \in \mathbb{Q}[X]$, das zusammen mit der Geradengleichung ein Erzeugendensystem von I bildet. Finden Sie dieses!

g) Geben Sie $V_{\mathbb{C}}(I)$ explizit an!

h) Bilden h und h^* bezüglich irgendeiner Monomordnung eine Gröbner-Basis von I?

Aufgabe 4: *(11 Punkte)*

a) Berechnen Sie eine GRÖBNER-Basis des von

$$f = X^2 + 2XY + Y^2 \quad \text{und} \quad g = Y^2 + 2XY + X$$

erzeugten Ideals I von $\mathbb{Q}[X, Y]$ bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung!

b) Ist die berechnete GRÖBNER-Basis reduziert? Ersetzen Sie sie gegebenenfalls durch eine reduzierte. Falls Sie keine Brüche als Koeffizienten wollen, können Sie dabei die Bedingung, daß alle führenden Koeffizienten eins sein sollen, ignorieren.

b) Hat die gefundene reduzierte Basis für irgendeine Anordnung der Variablen die Form gemäß Shape-Lemma?

c) Bestimmen Sie $V_{\mathbb{C}}(I)$ und die Vielfachheiten aller Nullstellen!

d) Finden Sie eine Basis von $\sqrt{I}$ in einer Form gemäß dem Shape-Lemma!

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Das Ideal I in $\mathbb{Q}[X, Y]$ werde erzeugt von den beiden Polynomen $f = X - Y - Y^2$ und $g = X - Y^2 - Y^3$. Finden Sie ein Polynom aus $\mathbb{Q}[Y]$ in diesem Ideal, das zusammen mit einem der beiden Polynome f oder g ein Erzeugendensystem von I in der Form gemäß dem Shape-Lemma bildet!

b) Bezüglich welcher Monomordnung ist dieses Erzeugendensystem sicher eine GRÖBNER-Basis?

c) Bestimmen Sie $V_{\mathbb{C}}(I)$!

d) Welche Multiplizitäten haben die einzelnen Lösungen?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Welche Nullstellen hat das Polynom $f = X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 10X - 5$, und welche Vielfachheiten haben sie?
Hinweis: Bestimmen Sie für jede gefundene Nullstelle gleich deren Vielfachheit!

b) Finden Sie ein quadratfreies Polynom mit denselben Nullstellen!

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Finden Sie eine separierende Linearform aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ für die Menge $\{0, 1\} \times \{1, 2\}$!

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante des Polynoms $f = X^2 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ und seiner Ableitung bezüglich der Variablen X!

b) Was bedeutet es für die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn diese Resultante positiv, negativ *bzw.* Null ist?

Abgabe bis zum Montag, dem 18. Dezember 2017, um 10.00 Uhr