

1. Dezember 2017

## 11. Übungsblatt Computeralgebra

### Aufgabe 1: (15 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine GRÖBNER-Basis des von  $P_1 = 3X^2Y + 9X^2 + 2XY + 5X + Y - 3$ ,  $P_2 = 2X^3Y + 6X^3 - 2X^2 - XY - 3X - Y + 3$  und  $P_3 = X^3Y + 3X^3 + X^2Y + 2X^2$  erzeugten Ideals  $I$  von  $\mathbb{Q}[X, Y]$  bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung!
- b) Berechnen Sie die S-Polynome der Basiselemente mit dem Polynom  $X$  und dividieren Sie das Ergebnis durch  $X$ !
- c) Verwenden Sie die Ergebnisse aus G um eine GRÖBNER-Basis von  $J = I + (X)$  zu konstruieren!
- d) Ist diese Basis auch eine GRÖBNER-Basis bezüglich der inversen graduiert-lexikographischen Ordnung mit  $Y > X$ ?
- e) Finden Sie eine geeignete univariate rationale Darstellung für die Lösung des Gleichungssystems  $P_1(x, y) = P_2(x, y) = P_3(x, y) = 0$  und bestimmen Sie dessen Lösungsmenge!
- f) Betrachten Sie für  $A = \mathbb{Q}[X, Y]/I$  die linearen Abbildungen  $f \mapsto X \cdot f$  und  $f \mapsto Y \cdot f$ , und berechnen Sie deren Abbildungsmatrizen bezüglich einer geeigneten Basis!
- g) Berechnen Sie die Eigenwerte dieser beiden Matrizen!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 5. Dezember 2017, um 12.00 Uhr