WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. November 2017

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
$f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ seien Polynome mit der Eigenschaft, daß f_i keine Variable außer X_i enthält. Zeigen Sie: $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis von $I = (f_1, \dots, f_n)$!
Hinweis: Betrachten Sie $V_K(I)$ und den Vektorraum $k[X_1, \dots, X_n]/I$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Sei $f = X^2Y^2 - X^3 + Y$ und $g = Y^2 - X^3 + XY^2$. Zeigen Sie: $V_{\mathbb{C}}(f, g)$ hat acht Elemente, von denen sieben die Vielfachheit eins haben und eines die Vielfachheit drei!

b) Bestimmen Sie ohne den Umweg über die Spurmatrix das Radikal von (f, g) !

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*
Sei $f = 4X^2 - Y^2$ und $g = X^2 + 4Y$.

a) Bestimmen sie die GRÖBNER-Basis des Ideals $I = (f, g)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung!

b) Nehmen Sie die Standardmonome dazu als Basis von $A = \mathbb{Q}[X, Y]/I$ und stellen Sie die Spurmatrix auf!

c) Berechnen Sie daraus $\sqrt{I}$!

d) Bestimmen Sie $V_{\mathbb{C}}(I)$, und geben Sie für jedes Element sowohl des Vielfachheit in $V_{\mathbb{C}}(I)$ an als auch die in $V_{\mathbb{C}}\big(\sqrt{I}\big)$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 14. November 2017, um 12.00 Uhr