Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

3. November 2017

7. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen S_i multiplikativ abgeschlossen sind, und beschreiben Sie für diese die Lokalisierung $S_i^{-1}\mathbb{Z}$ möglichst einfach!

$$S_1 = \{2^n | n \in \mathbb{N}_0\}, \quad S_2 = \{8^n | n \geq 1000\}, \quad S_3 = \mathbb{Z} \smallsetminus (2), \quad S_4 = \mathbb{Z} \smallsetminus (8)$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) In $\mathbb{R}[X]$ sei $S = \mathbb{R}[X] \smallsetminus (X)$. Zeigen Sie: Die Elemente von $S^{-1}\mathbb{R}[X]$ sind genau die rationalen Funktionen $f \in \mathbb{R}(X)$, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß f eine Funktion
$$U_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| |x| < \varepsilon\big\} \to \mathbb{R}$$
definiert.

b) Gilt für $S^{-1}\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit $S = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \smallsetminus (X_1, \dots, X_n)$ eine entsprechende Aussage?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Sei $f = X^3 + X^2$, $g = Y^3 + Y^2$ und I das von f und g erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

a) Was ist $V_\mathbb{C}(I)$?

b) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{Q}[X, Y]/I$!

c) Bestimmen Sie die Multiplizitäten aller Nullstellen!

d) Bestimmen Sie das Radikal $\sqrt{I}$ und eine Basis von $\mathbb{Q}[X, Y]/\sqrt{I}$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Sei $f = 9X^2 + 16Y^2 - 144$, $g = 25X^2 + 4(Y + 1)^2 - 100$ und I das von f und g erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

a) Lassen Sie ein Computeralgebrasystem Gröbner-Basen von I bestimmen bezüglich der lexikographischen Ordnungen mit $X > Y$ *bzw.* $Y > X$ sowie auch der entsprechenden graduiert lexikographischen Ordnungen! In welchen Fällen hat diese Basis bezüglich einer der beiden Variablen die Form aus dem Shape-Lemma?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer der berechneten Gröbner-Basen die Nullstellenmenge $V_\mathbb{C}(I)$!

c) Zeigen sie, daß alle Nullstellen Vielfachheit eins haben!

d) Interpretieren Sie die Nullstellenmenge geometrisch!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 7. November 2017, um 12.00 Uhr