Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

19. Oktober 2017

6. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

Die vier Polynome Y^2+6Y+X^2-2X, $2Y^2-20Y+X^2+4X+40$, $-Y^2+26Y-6X-40$ und $Y^4-52Y^3+804Y^2-2176Y+2080$ bilden bezüglich der lexikographischen Ordnung eine Gröbner-Basis des von $f=(X-1)^2+(Y-3)^2-10$ und $g=(X+2)^2+2(Y-5)^2-14$ erzeugten Ideals in $\mathbb{Q}[X,Y]$.

a) Bestimmen Sie dazu eine minimale sowie die reduzierte Gröbner-Basis!

b) Wie viele Elemente (mit Vielfachheit gezählt) hat $V_{\mathbb{C}}(f,g)$?

c) Zeigen Sie, daß alle Lösungen Vielfachheit eins haben!

d) Zeigen Sie, daß $I=(f,g)$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ enthält!
Hinweis: Der ggT zweier Polynome p,q wird sowohl in Maple als auch in Maxima mit dem Kommando `gcd(p, q)` berechnet.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) R sei ein Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R und $S=R\smallsetminus\mathfrak{p}$. Zeigen Sie, daß der Ring $S^{-1}R$ genau ein maximales Ideal hat, nämlich das von $\mathfrak{p}$ erzeugte!

b) Bestimmen Sie den totalen Quotientenring von $\mathbb{Z}/n$ für $n\in\mathbb{N}$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $R=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ ist mit komponentenweise definierter Addition und Multiplikation ein Ring.

b) Ist R ein Integritätsbereich?

c) Bestimmen Sie die Menge E allet idempotenter Elemente von R!

d) Zeigen Sie: Es gibt eine dreielementige Teilmenge $E'\subset E$, daß $R\cong\bigoplus_{e\in E'} Re$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 23. Oktober 2017, um 12.00 Uhr