WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

12. Oktober 2017

5. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
Finden Sie Ideale I in $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$, für die $V(I)$ gleich der angegebenen Teilmenge von $\mathbb{Q}^3$ ist:

a) $\{-1,0,1\}\times\{3,5\}\times\{1,2,3\}$

b) $\big\{(-2,-1,0),\ (-1,0,1),\ (0,1,2),\ (1,2,3),\ (2,3,4)\big\}$

c) $\big\{(3,1,4),\ (1,5,9),\ (2,6,5),\ (3,5,8)\big\}$

Etwa notwendige GRÖBNER-Basen sollten mit einem Computeralgebrasystem berechnet werden; mit alternativen Ansätzen läßt sich zumindest manchmal allerdings viel Arbeit sparen.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Finden Sie für die folgenden Ideale I in $\mathbb{Q}[X,Y]$ sowohl die Nullstellenmenge als auch Monome aus $\mathbb{Q}[X,Y]$, deren Restklassen eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[X,Y]/I$ bilden:

a) $I=(X,Y)$

b) $I=(X^3-X,Y^3-Y)$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die angegeben Erzeugendensysteme der beiden Ideale aus der vorigen Aufgabe bezüglich jeder beliebigen Mononmordnung GRÖBNER-Basen sind!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

a) R sei ein Ring und I, J seien Ideale von R. Zeigen Sie, daß $\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$ ist!

b) In $R=k[X,Y]$ sei $I=\big(X(X+Y)\big)$ und $J=\big(Y(X+Y)\big)$. Bestimmen Sie $\sqrt{I}+\sqrt{J}$ und $\sqrt{I+J}$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 17. Oktober 2017, um 12.00 Uhr