Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. September 2017

2. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

a) In $\mathbb{Z}$ sei $I = (5)$ und $J = (9)$. Zeigen Sie, daß $I \cap J = I \cdot J$ ist!

b) Gilt dies auch noch, wenn wir $I = (15)$ setzen?

c) Im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ sei $I = (X^2, Y)$ und $J = (X, Y^2)$. Ist $I \cap J = I \cdot J$?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Ordnen Sie die Terme des Polynoms

$$f = 5X^4YZ + 7X^2Y^2Z^2 + 9Y^4Z^2 + 11X^3Y^3 + 13X^5 + 15X^3Z^3 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$$

der Größe nach

a) für die lexikographische Ordnung

b) für die graduiert lexikographische Ordnung

c) für die invers lexikographische Ordnung

d) für die graduiert invers lexikographische Ordnung!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Für den Polynomring in zwei Veränderlichen über einem Körper k stimmt die graduiert lexikographische Ordnung überein mit der graduiert invers lexikographischen Ordnung!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

In dieser Aufgabe fassen wir die Elemente von $\mathbb{N}_0^n$ und $\mathbb{Z}^n$ auf als Spaltenvektoren. Außerdem dehnen wir die lexikographische Ordnung aus auf $\mathbb{Z}^n$ durch die Vorschrift, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T <_{\text{lex}} (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$ genau dann, wenn die erste von Null verschiedene Differenz $\alpha_i - \beta_i$ negativ ist.

a) Zeigen Sie, daß α im Sinne der graduiert invers lexikographischen Ordnung genau dann kleiner ist als β, wenn $M\alpha <_{\text{lex}} M\beta$ ist für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}!$$

b) Finden Sie eine Matrix N, so daß α im Sinne der graduiert lexikographischen Ordnung genau dann kleiner ist als β, wenn $N\alpha <_{\text{lex}} N\beta$ ist!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 19. September 2017, um 12.00 Uhr