Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

7. September 2017

1. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Das *Global Positioning System* GPS NAVSTAR besteht aus einer Reihe von Satelliten, die die Erde in einer Höhe von ungefähr 20 000 km umkreisen; Navigationsgeräte können, wenn sie mindestens vier dieser Satelliten empfangen, aus den Signallaufzeiten wie folgt ihre Position berechnen: Satellit i sendet alle dreißig Sekunden eine Nachricht, die unter anderem seine Position (x_i, y_i, z_i) sowie die Zeit t_i enthält. Wird dies zur Zeit t im Punkt (x, y, z) empfangen, ist daher

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 = c^2(t-t_i)^2 ,$$

wobei c die mittlere Signalgeschwindigkeit bezeichnet. Beim Empfang von vier Satelliten hat man somit vier nichtlineare Gleichungen für die vier Unbekannten x, y, z und t. Finden Sie einen Weg, dieses Gleichungssystem zu lösen durch Anwendung des Gauss-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) R sei ein Ring. Ein Ideal I von R heißt *Hauptideal,* wenn es ein Element $a \in R$ gibt, so daß $I = (a)$ ist.

a) Zeigen Sie: Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptideal.

b) Für zwei Hauptideale $(a), (b)$ in $\mathbb{Z}$ gilt: $(a) \cdot (b) = (ab)$ und $(a) + (b) = \big(\mathrm{ggT}(a, b)\big)$

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big] = \big\{a + b\sqrt{-5} \bigm| a, b \in \mathbb{Z}\big\}$ ein Integritätsbereich ist!

b) Zeigen Sie, daß für die Abbildung

$$N\colon \begin{cases} \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big] \to \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{-5} \mapsto \big(a + b\sqrt{-5}\big)\big(a - b\sqrt{-5}\big) = a^2 + 5b^2 \end{cases}$$

gilt: $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ mit $N(x) \in \{1, 2, 3\}$!

d) Zeigen Sie: Läßt sich eine der vier Zahlen $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ darstellen als Produkt zweier Elemente $x, y \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$, so ist entweder x oder y eine der beiden Zahlen ± 1.

e) Wir betrachten die Ideale $I_1 = (2)$, $I_2 = (3)$, $I_3 = \big(1 + \sqrt{-5}\big)$ und $I_4 = \big(1 - \sqrt{-5}\big)$. Berechnen Sie die Produkte $I_1 \cdot I_2$ und $I_3 \cdot I_4$!

f) Für $\mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei $I_{\mu\nu} = I_\mu + I_\nu$. Berechnen Sie die Ideale $I_{13} \cdot I_{14}$, $I_{23} \cdot I_{24}$, $I_{13} \cdot I_{23}$ und $I_{14} \cdot I_{24}$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 12. September 2017, um 12.00 Uhr