WOLFGANG K. SEILER — A5, C201
Tel. 2515

1. Dezember 2017

Beispielaufgaben für die Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*

a) Welche Bedingungen muß eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines Rings erfüllen, um ein Ideal zu sein?

b) Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale in $\mathbb{Z}[X]$? (Bei den angegebenen Polynomen soll stets d beliebig und $a_d \neq 0$ sein.)

$$M_1 = \mathbb{Z}, \quad M_2 = \mathbb{Z}[X^2], \quad M_3 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \text{alle } a_i \text{ sind gerade} \right\},$$

$$M_4 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i \text{ ist gerade} \right\}, \quad M_5 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i \text{ ist ungerade} \right\}$$

$$M_6 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; a_0 \text{ ist gerade} \right\}, \quad M_7 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; a_d \text{ ist gerade} \right\},$$

c) Geben Sie in allen Fällen, in denen M_i ein Ideal ist, ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von M_i an!

Aufgabe 2: *(18 Punkte)*

Wir arbeiten mit der lexikographischen Ordnung (mit $X > Y$) im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ und betrachten dort das Ideal $I = (f, g)$ mit

$$f = (X-1)^2 + 2(Y-1)^2 - 3 \quad \text{und} \quad g = (X-1)^2 - Y^2 - 1\,.$$

a) Zeigen Sie, daß f und g keine GRÖBNER-Basis von I bilden.

b) Zeigen Sie, daß g und $f - g$ eine GRÖBNER-Basis bilden!

c) Zeigen Sie ohne weitere Rechnung: Wenn g und $f - g$ eine GRÖBNER-Basis von I bilden, gilt dasselbe für f und $f - g$.

d) Geben Sie eine reduzierte GRÖBNER-Basis von I an!

e) Auf welche reduzierte GRÖBNER-Basis hätte die Basis aus f und $f - g$ geführt?

f) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $V(I)$!

g) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $f = X^4Y^2 + 2X^2Y + 3X^3$ und $g = X^2Y^4 + 3XY^2 + 2Y^3$ bilden bezüglich jeder Monomordnung eine GRÖBNER-Basis des von ihnen erzeugten Ideals von $\mathbb{Q}[X, Y]$.

b) Bilden Sie auch bezüglich jeder Monomordnung eine reduzierte GRÖBNER-Basis?

Aufgabe 4: *(18 Punkte)*
Wir betrachten das Ideal $I = (f, g)$ mit

$$f = (X-1)^2 + Y^2 - 25 \quad \text{und} \quad g = (X-1)Y - 12$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$.

a) Zeigen Sie, daß g bezüglich jeder Monomordnung (auch solcher, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden) denselben führenden Term hat!

b) Geben Sie für jeden Term von f, der als führender Term bezüglich einer Monomordnung auftreten kann, eine entsprechende Monomordnung an! Im folgenden arbeiten wir mit der lexikographischen Ordnung mit $X > Y$.

c) Berechnen Sie das S-Polynom von f und g und bestimmen Sie seinen Rest h bei der Division durch f und g!

d) Berechnen Sie das S-Polynom k von g und h!

e) Zeigen Sie, daß h und k eine GRÖBNER-Basis des Ideal (h, k) in $\mathbb{Q}[X, Y]$ bilden, und bestimmen Sie die zugehörige reduzierte Basis!

f) Warum ist $(h, k) \subseteq (f, g)$?

g) Zeigen Sie, daß sogar $(h, k) = (f, g)$ ist!

h) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f und g!

i) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $X^6 + 3X^5 + 2X^4 - 25X^2 - 75X - 50$!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*
Auf $\mathbb{N}_0^n$ sei eine Größerbeziehung dadurch definiert, daß $\alpha > \beta$ falls $\sum_{i=1}^n i\alpha_i > \sum_{i=1}^n i\beta_i$ gilt oder $\sum_{i=1}^n i\alpha_i = \sum_{i=1}^n i\beta_i$ und α ist lexikographisch *kleiner* als β.

a) Zeigen Sie, daß dies eine Monomordnung definiert!

b) Ordnen Sie die Monome im Polynom $X_1X_2X_3X_4 + X_2^3X_4 + X_1X_3^3$ der Größe nach!

c) Berechnen Sie für zwei n-Tupel $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ das S-Polynom von X^α und X^β bezüglich dieser Monomordnung. Unterscheidet es sich von dem bezüglich der lexikographischen Ordnung?

Aufgabe 7: *(10 Punkte)*

a) Dividieren Sie das Polynom $f = X^2Y + XY^2 - X^2 + X + Y^2 + Y^4 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ durch die beiden Polynome $f_1 = X + Y^2$ und $f_2 = X^2 + XY + Y^3$ bezüglich der graduiert lexikographischen Ordnung!

b) Bilden f_1 und f_2 eine GRÖBNER-Basis des von ihnen erzeugten Ideals? Falls nicht, ergänzen Sie f_1, f_2 zu einer GRÖBNER-Basis!

c) Liegt f im Ideal (f_1, f_2)?

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*
Finden Sie ein quadratfreies Polynom, das die gleichen Nullstellen hat wie $X^8 - 3X^6 - 2X^5$!

Aufgabe 9: *(4 Punkte)*

Finden Sie eine separierende Linearform für die Menge $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$!

Aufgabe 10: *(10 Punkte)*

a) Das Ideal I in $\mathbb{Q}[X,Y]$ werde erzeugt von den beiden Polynomen $f = X + Y^2 + Y^3 + Y^4$ und $g = X + Y^3 + Y^4 + Y^5$. Finden Sie ein Polynom aus $\mathbb{Q}[Y]$ in diesem Ideal, das zusammen mit einem der beiden Polynome f oder g ein Erzeugendensystem von I in der Form gemäß dem Shape-Lemma bildet!

b) Bezüglich welcher Monomordnungen ist dieses Erzeugendensystem eine GRÖBNER-Basis?

c) Bestimmen Sie $V_{\mathbb{C}}(I)$!

d) Welche Multiplizitäten haben die einzelnen Lösungen?

e) Finden Sie ein Ideal J mit $V_{\mathbb{C}}(J) = V_{\mathbb{C}}(I)$ derart, daß alle Lösungen in $V_{\mathbb{C}}(J)$ Vielfachheit eins haben!

Aufgabe 11: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante des Polynoms $f = X^3 + pX + q$ und seiner Ableitung bezüglich der Variablen X!

b) Was bedeutet es für die Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wenn diese Resultante nicht verschwindet?