Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Dezember 2014

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 301 und 259 als Linearkombination dieser beiden Zahlen dar!

b) Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = X^2 + \lambda$ und $g = X^2 - \lambda X + \lambda$ bezüglich X, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

Geben Sie für jeden der folgenden Ringe an, ob er ein Integritätsbereich, Euklidisch und/oder faktoriell ist! Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen kurzen Verweis aus einen Satz oder eine Definition der Vorlesung oder zeigen Sie an einem Beispiel, daß der Ring die betrachtete Eigenschaft nicht haben kann:

a) $\mathbb{Z}$, *b)* $\mathbb{Z}[X]$ *c)* $(\mathbb{Z}/6)[X]$, *d)* $\mathbb{Q}[X]$ *e)* $\mathbb{Q}[X,Y]$ *f)* $\mathbb{Q}[X,Y]/(XY)$!

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

Wir betrachten das Polynom $f = X^2Y^2 + XY^3 + X^2Y + X^3 \in \mathbb{Z}[X,Y]$.

a) Schreiben Sie f als Polynom aus $\mathbb{Z}[X][Y]$ bzw. $\mathbb{Z}[Y][X]$ und geben Sie jeweils den Inhalt und den primitiven Anteil an!

b) Bestimmen Sie die führenden Terme von f bezüglich der lexikographischen und der graduiert-lexikographischen Ordnung sowohl für den Fall $X > Y$ als auch für $Y > X$!

c) Gibt es eine Monomordnung, bezüglich derer X^2Y das führende Monom ist?

d) Ist f irreduzibel?

Aufgabe 4: (*18 Punkte*)

Wir arbeiten mit der lexikographischen Ordnung (mit $X > Y$) im Polynomring $\mathbb{Q}[X,Y]$ und betrachten dort das Ideal $I = (f,g)$ mit

$$f = (X-1)^2 + 2(Y-1)^2 - 3 \quad \text{und} \quad g = (X-1)^2 - Y^2 - 1\,.$$

a) Zeigen Sie, daß f und g keine Gröbner-Basis von I sind.

b) Zeigen Sie, daß g und $f - g$ eine Gröbner-Basis bilden!

c) Zeigen Sie ohne weitere Rechnung: Wenn g und $f - g$ eine Gröbner-Basis von I bilden, gilt dasselbe für f und $f - g$.

d) Geben Sie eine reduzierte Gröbner-Basis von I an!

e) Auf welche reduzierte Gröbner-Basis hätte die Basis aus f und $f - g$ geführt?

f) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $V(I)$!

g) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

Gegeben seien die beiden Polynome

$$f = 3X^3 + 2X^2 - X + 1 \quad \text{und} \quad g = X^2 + 2X + 2$$

aus $\mathbb{Z}[X]$; für jede Primzahl p seien $f^{(p)}, g^{(p)} \in \mathbb{F}_p[X]$ die entsprechenden Polynome mit Koeffizienten modulo p.

a) Geben Sie eine obere Schranke an für den Betrag von $\mathrm{Res}_X(f, g)$!

b) Für welche Primzahlen können Sie sicher sein, daß $\mathrm{Res}_X(f, g) \bmod p = \mathrm{Res}_X(f^{(p)}, g^{(p)})$?

c) Tatsächlich ist der Betrag der Resultante von f und g kleiner als hundert, und wie man nachrechnen kann (aber nicht muß), ist $\mathrm{Res}_X(f^{(59)}, g^{(59)}) = 6$ und $\mathrm{Res}_X(f^{(61)}, g^{(61)}) = 4$. Berechnen Sie $\mathrm{Res}_X(f, g)$!

d) Für welche Primzahlen p haben $f^{(p)}$ und $g^{(p)}$ einen gemeinsamen Faktor?

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Schreiben Sie das Polynom $f = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ als Produkt zweier nichttrivialer Faktoren!

b) Haben Sie damit die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren gefunden?

c) Finden Sie einen Linearfaktor des Polynoms $g = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$!

d) Zerlegen Sie g in seine irreduziblen Faktoren!

e) Zeigen Sie, daß das Polynom $h = X^4 - 4X^3 + 5X^2 + 6X + 7 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist!

Abgabe bis zum Samstag, dem 13. Dezember 2014, um 13.00 Uhr