Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

28. November 2014

13. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 221 und 153 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

b) Zeigen Sie, daß es höchstens drei Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, für die der ggT der beiden Polynome $f_\lambda = X^3 + \lambda X^2 + \lambda X + \lambda$ und $g = X^3 + 3X + 1$ aus $\mathbb{C}[X]$ positiven Grad hat!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie,daß die Polynome $f = 5X + Y^3 - 10Y$ und $g = Y^4 - 10Y^2 + 25$ bezüglich der lexikographischen Ordnung eine Gröbner-Basis des Ideals (f, g) in $\mathbb{Q}[X, Y]$ bilden!

b) Finden Sie eine reduzierte Gröbner-Basis von (f, g)!

c) Bestimmen Sie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y) = 0\}$!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die beiden Polynome $f = 10X^5 + 3X^2 + 1$ und $g = 6X^7 - 2X^3 + X + 7$ aus $\mathbb{Z}[X]$ die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(f^{(2)}, g^{(2)})$, $\mathrm{ggT}(f^{(3)}, g^{(3)})$ und $\mathrm{ggT}(f, g)$!

b) Schreiben Sie $h = X^5Y^2 + Y^5X^2 + X^5 + Y^3X^2 + Y^4 + Y^2$ als Polynom in X mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[Y]$ und berechnen Sie seinen Inhalt!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ und $g = X + d$ bezüglich X und interpretieren Sie das Ergebnis!

b) Zeigen Sie, daß die Resultante von $f = X^5 + X^2 + 12$ und $g = X^8 + X - 9$ durch drei teilbar ist!

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

Das Polynome $X^5 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel.

a) Faktorisieren Sie das Polynom $X^{15} + X^9 + X^3 + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$!

b) Faktorisieren Sie das Polynom $X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 6X^2 - 5X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$!

Keine Abgabe – Semesterende