Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. November 2014

11. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß der ggT von $f = x^2 + 2xy + x + y^2 + y$ und $g = x^2 + 2xy + 2x + y^2 + 2y$ höchstens linear in y sein kann!

b) Berechnen Sie diesen ggT, indem Sie die größten gemeinsamen Teiler von $f(x, 0)$ und $g(x, 0)$ sowie $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ berechnen und interpolieren!

c) Wie hätten Sie diesen ggT ohne jeden Euklidischen Algorithmus viel einfacher sehen können?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Funktionswerte des Polynoms $f = x^4 - x^2 + 2x - 1$ für $x = -2, -1, 0, 1, 2$!

b) Faktorisieren Sie f nach dem Verfahren von Kronecker! Die notwendigen Interpolationspolynome liefert Ihnen der Maple-Befehl `interp([x₁, ..., xₙ], [y₁, ..., yₙ], x)`, der ein Polynom g in x berechnet mit $g(x_i) = y_i$. Bei Maxima müssen Sie zunächst mit `load(interpol)$` die Interpolationsroutinen laden; danach funktioniert der Befehl `lagrange([[x₁, y₁], [x₂, y₂], ..., [xₙ, yₙ]]);`

c) Bestimme Sie die Nullstellen der biquadratischen Gleichung $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

k sei ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie:

a) Zu jedem $a \in k$ gibt es höchstens ein $x \in k$ mit $x^p = a$.

b) Falls $\mathrm{ggT}(n, p - 1) = 1$ ist, hat die Gleichung $x^n = a$ stets eine Lösung $x \in k$.

c) Das Polynom $x^p - x \in k[x]$ hat p Nullstellen in k; diese bilden einen Teilkörper.

d) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $x^5 = 10$ im Körper $\mathbb{F}_{2017}$!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die quadratfreie Zerlegung des Polynoms

$$f = x^9 - 2x^8 - 3x^7 + 7x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 8x - 4\,!$$

Größte gemeinsame Teiler können Sie von einem Computeralgebrasystem bestimmen lassen; alles andere (außer Polynomdivisionen) müssen Sie selbst tun.

b) Zerlegen Sie f ohne weitere Computerhilfe in $\mathbb{Z}[x]$ in irreduzible Faktoren!

c) Bestimmen Sie (ohne Computerhilfe) die Nullstellen von f !

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 20. November 2014, um 12.00 Uhr