Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

24. Oktober 2014

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Ein Ideal $M \lhd R$ eines Rings R heißt *maximal,* wenn zwar $M \neq R$ ist, aber für jedes $f \in R \setminus M$ das von M und f erzeugte Ideal die Eins enthält.

a) Zeigen Sie, daß $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ für jedes n-Tupel $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ ein maximales Ideal von $R = k[X_1, \dots, X_n]$ ist.

b) Zeigen Sie, daß für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k jedes maximale Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$ diese Form hat!

c) Finden Sie in $\mathbb{R}[X, Y]$ ein maximales Ideal M, das das Ideal $I = (X^2 + 1, Y^2 + 1)$ enthält. Läßt sich dieses in der Form $M = (X - a, Y - b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Ein Ideal $P \lhd R$ eines Rings R heißt *prim*, wenn gilt: Liegt das Produkt fg zweier Elemente $f, g \in R$ in P, so enthält P mindestens einen der beiden Faktoren f, g.

a) Zeigen Sie, daß für jedes Primideal $P \lhd R$ gilt: $\sqrt{P} = P$!

b) Ist $I \lhd R$ ein beliebiges Ideal, so liegt $\sqrt{I}$ im Durchschnitt aller Primideale, die I enthalten.

c) Jedes maximale Ideal ist prim.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

$P \lhd R$ sei ein Primideal und $S = R \setminus P$. Zeigen Sie, daß es in $S^{-1}R$ genau ein maximales Ideal gibt, nämlich das von P erzeugte!

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*

Wir betrachten in $R = \mathbb{Q}[X, Y]$ das Ideal $I = (X^2 - 1, Y^2 - 1)$.

a) Zeigen Sie, daß die beiden Erzeugenden bezüglich jeder Monomordnung eine Gröbner-Basis bilden!

b) Bestimmen Sie $V(I)$ und $\sqrt{I}$!

c) Geben Sie Monome an, deren Restklassen eine Basis von R/I bilden!

d) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, für die das lineare Polynom $aX + bY$ nicht auf allen Elementen von $V(I)$ verschiedene Werte annimmt!

e) Finden Sie für jedes Element von $V(I)$ ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X, Y]$, das dort den Wert eins annimmt, auf allen anderen Punkten von $V(I)$ aber verschwindet! Bilden auch die Restklassen dieser Polynome eine Basis von R/I ?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 30. Oktober 2014, um 12.00 Uhr