Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*17. Oktober 2014*

# 7. Übungsblatt Computeralgebra

**Aufgabe 1:** *(4 Punkte)*

*a)* Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X,Y]$, das auf der Kurve
$$K = \left\{ \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$
verschwindet! Ist $K$ die gesamte Nullstellenmenge von $f$?

*b)* Finden Sie eine Menge von Polynomen, die die getwistete kubische Kurve
$$C = \left\{ (t, t^2, t^3) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$
als gemeinsame Nullstellenmenge haben! Ist hier $C$ die vollständige Nullstellenmenge?

**Aufgabe 2:** *(6 Punkte)*

Das Ideal $I$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ werde erzeugt von $f = X^2 + 2Y^2 - 3$ und $g = X^2 + XY + Y^2 - 3$.

*a)* Berechnen Sie die Durchschnitte $I \cap k[X]$ und $I \cap k[Y]$!

*b)* Lassen sich diese auch durch Resultanten erzeugen?

*c)* Bestimmen Sie alle gemeinsamen Nullstellen von $f$ und $g$ in $\mathbb{R}^2$!

Gröbner-*Basen und Resultanten können Sie von einen Computeralgebrasystem berechnen lassen.*

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*

$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sei versehen mit Addition und Multiplikation modulo $p$.

*a)* Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f(X,Y) = X^2Y + XY^2 \in \mathbb{F}_2[X,Y]$ in $\mathbb{F}_2^2$!

*b)* Zeigen Sie, daß für jeden unendlichen Körper $k$ und je zwei Polynome $f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt: Genau dann ist $f = g$, wenn die beiden Funktionen
$$F\colon \begin{cases} k^n \to k \\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n) \end{cases} \quad \text{und} \quad G\colon \begin{cases} k^n \to k \\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto g(a_1, \ldots, a_n) \end{cases}$$
übereinstimmen!

*c)* Finden Sie in $\mathbb{F}_5[X,Y]$ zwei Polynome $f \neq g$ mit $F = G$, wobei $F$ aber keine konstante Funktion sein soll!

**Aufgabe 4:** *(5 Punkte)*

*a)* $R$ sei ein Ring und $I, J$ seien Ideale von $R$. Zeigen Sie, daß $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ ist!

*b)* Nun sein $R$ faktoriell und $I = (f)$ ein Hauptideal. Zeigen Sie, daß dann auch $\sqrt{I}$ ein Hauptideal ist und genau dann gleich $I$ ist, wenn in der Primfaktorzerlegung kein Faktor mit einer Potenz größer eins auftritt!

*c)* In $R = k[X,Y]$ sei $I = \big(X(X+Y)\big)$ und $J = \big(Y(X+Y)\big)$. Was sind $\sqrt{I}$ und $\sqrt{J}$?

*d)* Bestimmen Sie $I + J$ und $\sqrt{I+J}$! Ist $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$?

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 23. Oktober 2014, um 12.00 Uhr