Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*10. Oktober 2014*

# 6. Übungsblatt Computeralgebra

**Aufgabe 1:** *(8 Punkte)*

Wir gehen aus von einem linearen Gleichungssystem

$$\ell_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

über einem Körper $k$, betrachten die Linearformen $\ell_i$ als Elemente von $R = k[X_1, \dots, X_n]$, und setzen $I = (\ell_1 - b_1, \dots, \ell_m - b_m)$ in $R$. Wir arbeiten mit der lexikographischen Ordnung. Zeigen Sie:

*a)* $I$ ist genau dann das Nullideal, wenn jedes $n$-Tupel aus $k^n$ eine Lösung des Gleichungssystems ist.

*b)* $G$ sei eine Gröbner-Basis von $I$. Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn $G$ ein Polynom vom Grad null enthält.

*c)* Falls der Wert von $x_i$ durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt ist, enthält jede Gröbner-Basis von $I$ ein Polynom mit führendem Monom $X_i$. Gilt auch die Umkehrung?

*d)* Welche Möglichkeiten gibt es für die S-Polynome $S(\ell_i, \ell_j)$ ?

*e)* Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine Gröbner-Basis von $I$ gibt, die für jedes $i$ ein Polynom mit führendem Monom $X_i$ enthält.

*f)* In diesem Fall enthält jede minimale Gröbner-Basis von $I$ für jedes $i$ genau ein Polynom mit führendem Term $X_i$.

*g)* Wie sieht die reduzierte Gröbner-Basis von $I$ in diesem Fall aus?

**Aufgabe 2:** *(4 Punkte)*

*a)* $I$ sei ein Ideal im Polynomring $k[x]$. Zeigen Sie, daß eine endliche Menge $G \subset I$ genau dann eine Gröbner-Basis ist, wenn der kleinste Grad eines Elements von $G$ gleich dem Minimum der Grade der Elemente von $I$ ist.

*b)* Im Falle von $I = (f_1, \dots, f_m)$ ist $G$ genau dann eine Gröbner-Basis, wenn eines der $f_i$ ein ggT der Polynome $f_1, \dots, f_m$ ist.

*c)* Jede minimale Gröbner-Basis von $I$ ist reduziert und einelementig.

**Aufgabe 3:** *(8 Punkte)*

*a)* Konstruieren Sie (ohne Verwendung eingebauter Kommandos eines Computeralgebrasystems) die reduzierte Gröbner-Basis des Ideals

$$I = \left(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1,\ \ X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X,\ \ 2X - 3Y - Z\right)$$

des Polynomrings $k[X, Y, Z]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Sie sollten dazu zwar mit S-Polynomen arbeiten, aber nicht streng dem Buchberger-Algorithmus folgen, sondern nicht mehr benötigte Erzeugende so schnell wie möglich eliminieren.

*b)* Bestimmen Sie die Menge aller Tripel $(x, y, z)$, die Nullstellen aller Polynome aus $I$ sind!

*c)* Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 16. Oktober 2014, um 12.00 Uhr