Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

3. Oktober 2014

5. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Bei der graduierten invers-lexikographischen Ordnung ist $\alpha < \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, wenn entweder die Summe der α_i kleiner ist als die der β_i, oder wenn beide Summen gleich sind und α im Sinne der *invers* lexikographischen Ordnung *größer* ist als β. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Monomordnung definiert!

b) In dieser Teilaufgabe fassen wir die Elemente von $\mathbb{N}_0^n$ auf als Spaltenvektoren. Zeigen Sie, daß α im Sinne der gerade definierten Ordnung genau dann kleiner ist als β, wenn $M\alpha$ im Sinne der auf $\mathbb{Z}$ ausgedehnten lexikographischen Ordnung kleiner ist als $M\beta$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Ordnen Sie die Monome $x^2y^2z^2, x^6, y^6, y^7, x^8, xy^4z$ und x^2y^4z nach dieser Ordnung der Größe nach an!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von $f = x^3y^2 + xy^4 + y^5$ durch $f_1 = xy - 2$ und $f_2 = y^3 - 1$

a) bezüglich der lexikographischen Ordnung!

b) bezüglich der graduierten lexikographischen Ordnung!

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*

Das Ideal I von $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ habe die Eigenschaft, daß mit jedem $f \in I$ auch alle in f vorkommenden Monome in I liegen. Zeigen Sie: I ist ein monomiales Ideal!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Die Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ erfülle die ersten beiden Bedingungen an eine Monomordnung und zusätzlich gelte, daß $(0, \dots, 0)$ das kleinste Element von $\mathbb{N}_0$ ist.

a) Zeigen Sie: Ist X^α ein Teiler von X^β, so ist $X^\alpha < X^\beta$ im Sinne dieser Ordnung.

b) Folgern Sie aus dem Lemma von Dickson, daß $<$ eine Monomordnung ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 9. Oktober 2014, um 12.00 Uhr