Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

26. September 2014

4. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) $m_1, \dots, m_r$ seien ganze Zahlen und $I = (m_1, \dots, m_r)$ das von ihnen erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß I das vom ggT der m_i erzeugte Hauptideal ist!

b) Zeigen Sie, daß jeder EUKLIDische Ring ein Hauptidealring ist!

c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[X, Y]$ kein Hauptidealring ist!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

$f, g \in \mathbb{Z}[X]$ seien zwei Polynome, p eine Primzahl, und $\overline{f}, \overline{g} \in \mathbb{F}_p[X]$ seien die durch f und g definierten Polynome modulo p. Zeigen Sie, daß p genau dann die Resultante von f und g teilt, wenn die Resultante von $\overline{f}$ und $\overline{g}$ verschwindet oder p die führenden Koeffizienten sowohl von f als auch von g teilt!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie nach dem in der Vorlesung behandelten EUKLID-artigen Algorithmus die Resultante der beiden Polynome

$$f = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5 \quad \text{und} \quad g = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21\,!$$

Polynomdivisionen mit Rest sollten dabei mit einem Computeralgebrasystem durchgeführt werden.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \quad \text{und} \quad x^2 + 4x + 3y^2 - 18y = -22$$

mit Hilfe einer Resultante exakt, und bestimmen Sie angenäherte numerische Werte ihrer Lösungen!

b) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der beiden Gleichungen und vergleichen Sie Ihre Zeichnung mit dem Rechenergebnis!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Oktober 2014, um 12.00 Uhr