Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

12. September 2014

2. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
In $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ seien Addition und Multiplikation komponentenweise definiert, d.h.

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')\,.$$

a) Zeigen Sie, daß R ein Ring ist!
b) Ist R auch ein Integritätsbereich?
c) Bestimmen Sie alle Elemente von R, die ein multiplikatives Inverses haben!
d) Bestimmen Sie alle Elemente $x \in R$, für die $x^2 = x$ ist und beschreiben Sie jeweils den Effekt der Multiplikation mit x !

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die Menge $R^\times$ aller Einheiten eines Integritätsbereichs R eine Gruppe bildet!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
a) Bestimmen Sie alle Einheiten des Rings $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$!
b) Zeigen Sie, daß R ein Euklidischer Ring ist bezüglich der Abbildung

$$\nu\colon \begin{cases} R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0 \\ a + bi \mapsto a^2 + b^2 \end{cases} !$$

c) Zeigen Sie, daß der Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$ kein Euklidischer Ring ist!

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*
Schreiben Sie die folgenden Polynome über $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ und über $\mathbb{C}[X]$ als Produkte irreduzibler Faktoren; falls Sie auch Einheiten verwenden, kennzeichnen Sie diese bitte:
a) $p = 2X^2 + 4$
b) $q = 3X^2 + 6x + 3$
c) $r = 4X^2 - 1$
d) $s = 5X + 10$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 18. September 2014, um 12.00 Uhr