Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

5. September 2014

1. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Läßt man ein Computeralgebrasystem die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ nach x auflösen, erhält man die Lösung

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Da hier a, b und c als unabhängige Variable betrachtet werden, ist diese Formel richtig; setzt man allerdings für a, b und c konkrete Zahlenwerte ein, kann es sein, daß die erforderlichen Rechnungen nicht durchführbar sind. Stellen Sie einen Algorithmus auf, der für jedes Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ die Menge der (komplexen) Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ bestimmt!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
$\mathbb{Q}[x]$ sei die Menge aller Polynome in x mit rationalen Koeffizienten. Wir sagen, ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ teile $f \in \mathbb{Q}[x]$, wenn es ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[x]$ gibt mit $f = p \cdot q$. Wir sagen, p sei ein größter gemeinsamer Teiler von $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, wenn p sowohl f als auch g teilt und wenn jedes andere Polynom $p^* \in \mathbb{Q}[x]$, das f und g teilt, auch p teilt.

a) Zeigen Sie: Ist p ein größter gemeinsamer Teiler von f und g und $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, so ist auch cp ein größter gemeinsamer Teiler von f und g.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (basierend auf der Polynomdivision mit Rest) einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f = 2x^3 + 1$ und $g = 7x^2 + 5x$!

c) Geben Sie einen möglichst einfachen größten gemeinsamen Teiler von f und g an!

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*
Das *Global Positioning System* GPS NAVSTAR besteht aus einer Reihe von Satelliten, die die Erde in einer Höhe von ungefähr 20 000 km umkreisen; Navigationsgeräte können, wenn sie mindestens vier dieser Satelliten empfangen, aus den Signallaufzeiten wie folgt ihre Position berechnen: Satellit i sendet alle dreißig Sekunden eine Nachricht, die unter anderem seine Position (x_i, y_i, z_i) sowie die Zeit t_i enthält. Wird dies zur Zeit t im Punkt (x, y, z) empfangen, ist daher

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 ,$$

wobei c die mittlere Signalgeschwindigkeit ist. Beim Empfang von vier Satelliten hat man somit vier nichtlineare Gleichungen für die vier Unbekannten x, y, z und t. Finden Sie einen Weg, dieses Gleichungssystem zu lösen durch Anwendung des Gauss-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 11. September 2014, um 15.30 Uhr