

3. Dezember 2013

## 10. Übungsblatt Algebraische Statistik

### Auswahl möglicher Prüfungsfragen

- Erklären Sie die Begriffe Ideal, Erzeugendensystem, monomiales Ideal und Monomordnung!
- Was besagt der HILBERTSche Basissatz? *Beweisidee?*
- Was besagt der HILBERTSche Nullstellensatz? *Beweisidee?*
- Was ist eine GRÖBNER-Basis?
- Wie kann man erzwingen, daß sie eindeutig bestimmt ist?
- Wie kann man, ausgehend von einem gegebenen Erzeugendensystem, eine GRÖBNER-Basis bestimmen?
- Wie kann man GRÖBNER-Basen zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme verwenden?
- Was ist die algebraische Varietät  $V(I)$  zu einem Ideal  $I$  aus  $k[X_1, \dots, X_d]$ , und was ist das Ideal  $I(V)$  einer algebraischen Varietät  $V$  in  $k^d$ ?
- Ist stets  $I(V(I)) = I$  und  $V(I(V)) = V$ ?
- Wie läßt sich eine Vektorraumbasis von  $k[X_1, \dots, X_d]/I(V)$  bestimmen?
- Was können Sie über  $V$  sagen, wenn dieser Vektorraum endlich ist?
- $V \subset k^d$  sei eine algebraische Varietät und  $\pi: k^d \rightarrow k^e$  die Projektion auf die ersten  $e$  Koordinaten. Wie können Sie, ausgehend von  $I(V)$ , das Ideal  $I(\pi(V))$  bestimmen?
- Was ist ein Design?
- Wie läßt sich dessen Ideal berechnen?
- Wie vereinfacht sich diese Berechnung im Falle eines binären Designs?
- Geben Sie eine Basis des Vektorraums  $\mathcal{L}(D)$  aller  $k$ -wertiger Funktionen auf einem Design  $D$  an!
- Wie läßt sich  $\mathcal{L}(D)$  als Faktorraum eines Polynomrings realisieren? Was bietet sich bei dieser Darstellung als Basis an?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Basen?
- Was ist der Fächer eines Designs?
- Wie kann man ihn berechnen?
- $D \subset k^d$  sei das Produkt von  $d$  Teilmengen des Körpers  $k$ . Was können Sie über den Fächer von  $D$  sagen?
- Was ist ein Indikatorpolynom, und wie bestimmt man es?
- Was ist das Indikatorpolynom eines binären Designs  $D \subset \{0, 1\}^d$  in Bezug auf das volle binäre Design  $\{0, 1\}^d$ ?
- Welche statistischen Modelle lassen sich anhand eines Designs  $D \subset k^d$  schätzen?
- Was ist *confounding* oder *aliasing*?
- Was ist die Matrix eines Designs, und wozu verwendet man sie?

- Wie ist die Menge  $\text{Est}_\tau(D)$  eines Designs zu einer Monomordnung  $\tau$  definiert?
- Wann sind für zwei Monomordnungen  $\sigma, \tau$  die Mengen  $\text{Est}_\sigma(D)$  und  $\text{Est}_\tau(D)$  gleich?
- $D_1, D_2 \subset k^d$  seien zwei Designs mit leerem Durchschnitt. Ist dann

$$\text{Est}_\tau(D_1 \cup D_2) = \text{Est}_\tau(D_1) \cup \text{Est}_\tau(D_2) ?$$

- Wie läßt sich zu einem Design  $D$  die Menge  $\text{Est}_\tau(D)$  schrittweise aufbauen?
- Was ist ein Ordnungsideal?
- Gibt es zu jedem Ordnungsideal eine Monomordnung, die dieses produziert?
- Wie groß kann die Menge aller Ordnungsideale eines Designs  $D$  werden?
- Wie berechnet man diese Menge?
- Wie lassen sich statistische Modelle mit periodischen Funktionen schätzen?
- Wie läßt sich die Ausfallsicherheit eines Systems mit Designs modellieren?
- Wann sind zwei Funktionen  $f, g: D \rightarrow k$  auf einem binären Design orthogonal?
- $D \subset k^d$  sei eine endliche Menge, versehen mit der Struktur eines Wahrscheinlichkeitsraums. Wie läßt sich die Menge aller Zufallsvariablen  $X: D \rightarrow k$  zu einem Ring machen?
- Wie läßt sich die Ringmultiplikation bezüglich der Polynomrepräsentation beschreiben?
- Wie läßt sich der Erwartungswert bezüglich einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $D$  zurückführen auf den Erwartungswert bezüglich der Gleichverteilung?
- Was sind die Momente einer Zufallsvariablen auf  $D$  ?
- Wozu dienen exponentielle Modelle, und wie kann man sie algebraisch behandeln?
- Wie sieht ein allgemeines statistisches Modell aus?
- Wie kann man zu Aussagen über die Varietät der Parameterwerte kommen?