Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

11. Oktober 2013

5. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
I und J seien zwei Ideale im Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ über dem Körper k und es gebe Elemente $f \in I$ sowie $g \in J$ derart, daß $f + g = 1$ ist.

a) Zeigen Sie, daß es dann kein echtes Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$ gibt, das sowohl I als auch J enthält.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $k[X_1, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/I \oplus k[X_1, \dots, X_n]/J$, die jedem Polynom $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ das Paar aus seiner Restklasse modulo I und seiner Restklasse modulo J zuordnet, surjektiv ist und den Durchschnitt $I \cap J$ als Kern hat!

c) Ein Ideal I von $k[X_1, \dots, X_n]$ heißt *maximal*, wenn es kein Ideal $J \neq k[X_1, \dots, X_n]$ gibt, das I echt enthält. Zeigen Sie, daß für maximale Ideale $I_1, \dots, I_r$ gilt

$$k[X_1, \dots, X_n]/(I_1 \cap \cdots \cap I_r) \cong k[X_1, \dots, X_n]/I_1 \oplus \cdots \oplus k[X_1, \dots, X_n]/I_r$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, M eine Teilmenge von k^n und

$$I(M) = \left\{ f \in k[X_1, \dots, k_n] \;\middle|\; f(x) = 0 \text{ für alle } x \in M \right\}.$$

Zeigen Sie: $k[X_1, \dots, X_n]/I(M)$ ist genau dann ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, wenn M eine endliche Menge ist.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
I ein Ideal von $k[X_1, \dots, X_n]$, dessen Gröbner-Basis G (bezüglich irgendeiner Monomordnung) für jedes i ein Polynom enthalte, dessen führendes Monom eine Potenz von X_i ist. Zeigen Sie, daß V(I) endlich ist!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Zu drei Merkmalen, von denen jeweils drei Stufen betrachtet werden, sollen alle möglichen Merkmalskombinationen untersucht werden.

a) Geben Sie ein entsprechendes DesignD an und bestimmen Sie dessen Ideal I(D)!

b) Bestimmen Sie einen möglichst einfachen Vektorraum von Polynomen derart, daß jede Äquivalenzklasse modulo I(D) genau ein Polynom aus diesem Raum enthält!

Abgabe bis zum Freitag, dem 18. Oktober 2013, um 11.55 Uhr