Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Oktober 2013

4. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Ist I ein Ideal im Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$, so bezeichnet man die Menge

$$\sqrt{I} \underset{\text{def}}{=} \left\{ g \in k[X_1, \dots, X_n] \;\middle|\; \exists r \in \mathbb{N} : g^r \in I \right\}$$

als das Radikal von I. Zeigen Sie, daß auch $\sqrt{I}$ ein Ideal ist!

b) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

c) Ist k algebraisch abgeschlossen und ist $V(I) = V(J)$ für zwei Ideale I, J aus $k[X_1, \dots, X_n]$, so ist $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Das Ideal I von $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ sei erzeugt vom Polynom $(X-1)^2 + (Y-2)^2 + (Z-3)^2$. Zeigen Sie, daß das Polynom $(X-1)(Y-2)(Z-1)$ zwar auf $V(I)$ verschwindet, nicht aber in $\sqrt{I}$ liegt!

b) Zeigen Sie: Für jedes Ideal I von $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, so daß $V(I) = V(f)$ ist!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) I sei das vom Polynom $(X-1)^3(X-2)^7(X-3)^{17}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie ein Polynom f, so daß $\sqrt{I} = (f)$ ist!

b) k sei ein beliebiger Körper, d, e seien natürliche Zahlen, und I sei das von X^d und Y^e erzeugte Ideal in $k[X, Y]$. Was ist $\sqrt{I}$?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß es über einem endlichen Körper k in $k[X]$ ein Polynom f positiven Grades gibt, so daß $f(a) = 1$ ist für alle $a \in k$!

b) Zeigen Sie, daß jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente enthalten muß!

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Oktober 2013, um 11.55 Uhr