Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. September 2013

2. Übungsblatt Algebraische Statistik

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß man in der Definition einer Monomordnung die dritte Bedingung, die Wohlordnungseigenschaft also, ersetzen kann durch die folgende Bedingung: $(0,\dots 0) \in \mathbb{N}_0^n$ ist kleiner als jedes andere Element.
Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Dickson!

b) Geben Sie ein Beispiel einer Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0^n$ an, die zwar die ersten beiden Forderungen an eine Monomordnung erfüllt, nicht aber die dritte!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie bezüglich der lexikographischen Ordnung auf $k[X,Y,Z]$ die folgenden S-Polynome:

a) $S(X, YZ)$
b) $S(X^2+Y^2+Z^2, 2Y^3+Z^2)$
c) $S(X^3+2X^2+X+1, Y^3+3Y+2)$
d) $S(X^2+3X+5, X^3+2X^2+7)$
e) $S(X+Y+1, Y+1)$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) $\ell^{(1)},\dots,\ell^{(m)} \in k[X_1,\dots,X_n]$ seien lineare Polynome, d.h.

$$\ell^{(i)}(X_1,\dots,X_n) = a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n + b_i \quad \text{mit} \quad a_{ij}, b_i \in k\,.$$

Welche Bedingungen müssen diese linearen Polynome erfüllen, damit $\{\ell^{(1)},\dots,\ell^{(m)}\}$ eine Gröbner-Basis bezüglich der lexikographischen Ordnung ist? Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist diese Gröbner-Basis minimal *bzw.* reduziert?

b) Zeigen Sie: Wenn $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$ das gleiche führende Monom haben, erzeugen $\ell^{(i)}$ und $S\big(\ell^{(i)},\ell^{(j)}\big)$ das gleiche Ideal wie $\ell^{(i)}$ und $\ell^{(j)}$.

c) Finden Sie zwei lineare Polynome $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$ derart, daß $\ell^{(1)}$ und $S\big(\ell^{(1)},\ell^{(2)}\big)$ nicht das gleiche Ideal wie $\ell^{(1)}$ und $\ell^{(2)}$!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jedes Ideal I von $k[X_1,\dots,X_n]$ bezüglich jeder Monomordnung eine eindeutig bestimmte reduzierte Gröbner-Basis hat!

Abgabe bis zum Freitag, dem 27. September 2013, um 11.55 Uhr