Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6,26, A4.18

27. Februar 2021

Modulklausur Algebra

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 + 6x - 3 = 8i(x + 3)$!

b) Bestimmen Sie über den Satz von Viète alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 + 4x = 3i(4 + x)$!

c) Bestimmen Sie zunächst alle ganzzahligen, dann alle komplexen Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) der Gleichung $x^5 - 8x^3 + 2x^2 + 15x = 10$!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

Eine Untergruppe U einer Gruppe G heißt *charakteristische Untergruppe* von G, wenn für jeden Automorphismus $\varphi\colon G \to G$ gilt: $\varphi(U) \subseteq U$. Zeigen Sie:

a) Im Falle einer endlichen Untergruppe U ist dann $\varphi(U) = U$.

b) Jede charakteristische Untergruppe U einer Gruppe G ist ein Normalteiler von G.

c) Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und U eine charakteristische Untergruppe von N, so ist U ein Normalteiler der Gruppe G.

d) Für zwei Elemente g, h einer Gruppe G bezeichnet man $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ als den *Kommutator* von g und h; die kleinste Untergruppe von G, die alle Kommutatoren von Elementen aus G enthält, heißt die *Kommutatorgruppe* $[G, G]$ von G. Zeigen Sie: $[G, G]$ ist eine charakteristische Untergruppe von G !

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

a) Ein Spielzeug-RSA-System arbeitet mit dem Modul $N = 1333 = 31 \cdot 43$. Finden Sie die kleinste natürliche Zahl $e \geq 2$, für die die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/N \to \mathbb{Z}/N \\ x \mapsto x^e \end{cases}$$

bijektiv ist!

b) Bestimmen Sie einen privaten Exponenten d zu dem in *a)* gefundenen öffentlichen Exponenten e !

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Zur Feier des zwanzigsten Jahrestags seines Amtsantritts veranstaltet der Präsident der Unabhängigen Republik Bananien eine große Militärparade. Für die Spitze des Zuges ist eine Musikkapelle vorgesehen. Die Musiker marschieren in sechs Sechserreihen, und in jeder Reihe hat jeder Musiker das gleiche Instrument: Entweder eine Trommel, oder eine Posaune, oder ein Flügelhorn. Alle drei Instrumente sind wirklich vertreten. Eine Trommel wiegt 5 kg, eine Posaune 2 kg und ein Flügelhorn 3 kg. Insgesamt wiegen die Instrumente 108 kg. Wie viele Trommler, Posaunisten und Hornisten nehmen an der Parade teil?

b) Dahinter marschiert die Palastwache mit ihren fast Tausend Elitesoldaten. Damit alles einen ordentlichen Eindruck macht, sollen diese in Reihen einer festen Länge marschieren. Bei Zehnerreihen zeigt sich jedoch, daß in der letzten Reihe einer fehlt, um die Reihe voll zu machen, und bei Neunerreihen fehlen sogar zwei. Mit Elferreihen schließlich funktioniert es. Wie viele Soldaten der Palastwache nehmen an der Parade teil?

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Wann ist eine Teilmenge I eines (kommutativen) Rings R ein Ideal, und wann ist sie ein Hauptideal?

b) I und J seien Ideale im Ring R. Ist dann auch $I \cup J$ ein Ideal, und ist $I \cap J$ ein Ideal? Beweisen Sie Ihre Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

c) Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$ Ideale sind! Beweisen Sie entweder, daß es sich um ein Ideal handelt, oder zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß eine der Forderungen an ein Ideal verletzt ist!

$$I_1 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid a \equiv 0 \bmod 2\}, \qquad I_2 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid b \equiv 0 \bmod 2\},$$
$$I_3 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid a \equiv b \equiv 0 \bmod 2\}, \qquad I_4 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid a + b = 0\},$$
$$I_5 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid a = 0\}, \qquad I_6 = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid b = 0\}$$

d) Zeigen Sie, daß die Ideale unter diesen Mengen allesamt Hauptideale sind! Erraten Sie dazu ein möglichst einfaches Element der Menge, von dem Sie zeigen können, daß alle anderen Vielfache davon sind!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Inhalt $I(f)$ sowie den primitiven Anteil f^* für das Polynom $f = 3X^5 - 6X^4 + 9X^3 - 12X^2 + 6X \in \mathbb{Z}[X]$!

b) Die Eins ist eine mehrfache Nullstelle von f und damit auch von f^*. Bestimmen Sie ihre Vielfachheit!

c) Zerlegen Sie f sowohl in $\mathbb{Q}[X]$ als auch in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren! Wie viele verschiedene irreduzible Faktoren gibt es jeweils?

d) Finden Sie einen endlichen Erweiterungskörper $K/\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, daß f über K in Linearfaktoren zerfällt!

e) Welchen Grad hat der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 7: *(12 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{12}, \sqrt{24})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ denselben Teilkörper K von $\mathbb{R}$ definieren!

b) Welchen Grad hat die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$? Finden Sie eine möglichst einfache Basis von $K/\mathbb{Q}$!

c) Zeigen Sie, daß $K/\mathbb{Q}$ GALOISsch ist, und bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$!

d) Bestimmen Sie alle Körper L mit $\mathbb{Q} < L < K$!

e) Finden Sie ein irreduzibles Polynom f derart, daß $K \cong \mathbb{Q}[X]/(f)$ ist!

f) Zerlegen Sie f über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in seine irreduziblen Faktoren!

Abgabe bis zum Samstag, dem 27. Februar 2021, um 13^{00} Uhr