WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 B6,26, A4.18

13. Januar 2020

Modulklausur Algebra

Aufgabe 1: (*7 Punkte*)
Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen (einschließlich Vielfachheiten) der folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 4x - 1 = 4i(x-2)$

Lösung: Bringt man alle mit x behafteten Terme auf die linke Seite und den Rest auf die rechte, wir die Gleichung zu $x^2-(4+4i)x = 1-8i$ (d.h. $p = -4-4i$ und $q = -1+8i$) oder $\big(x-(2+2i)\big)^2-(2+2i)^2 = \big(x-(2+2i)\big)^2-8i = 1-8i$. Addition von $8i$ auf beiden Seiten macht daraus $\big(x-(2+2i)\big)^2 = 1$, d.h. $x-(2+2i) = \pm 1$. Die Lösungen sind somit $3+2i$ und $1+2i$. Da eine quadratische Gleichung mit Vielfachheiten gezählt zwei Lösungen hat, sind beides einfache Nullstellen.

b) $x^6 + 10x^4 + 29x^2 + 20 = 0$ (*Hinweis:* Beachten Sie, daß alle Exponenten gerade sind!)

Lösung: Die Gleichung hat offensichtlich keine reellen Lösungen, denn für reelle x ist die linke Seite stets mindestens 20. Mit $y = x^2$ wird die linke Seite zu

$$f(y) = y^3 + 10y^2 + 29y + 20\,.$$

Das Produkt aller Nullstellen von f ist nach VIÈTE gleich -20, und ihre Summe ist -10. Für positive y ist offensichtlich $f(y) \geq 20$; es reicht also, negative Teiler von 20 durchprobieren:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 10 - 29 + 20 = 0 \\ f(-2) &= -8 + 40 - 58 + 20 = -6 \\ f(-4) &= -64 + 160 - 116 + 20 = 0 \end{aligned}$$

Also sind -1 und -4 Nullstellen; die dritte muß dann nach VIÈTE gleich -5 sein, was man auch durch Einsetzen bestätigen kann. Die Nullstellen der ursprünglichen Gleichung sind daher $\pm i$, $\pm 2i$ und $\pm\sqrt{-5}$. Da die Gleichung sechsten Grades sechs verschiedene Nullstellen hat, sind alle Vielfachheit eins.

c) Bestimmen Sie zunächst alle Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers der beiden Polynome

$$f = X^6+3X^5+4X^4+6X^3+5X^2+3X+2 \quad \text{und} \quad g = X^6-3X^5+4X^4-6X^3+5X^2-3X+2\,,$$

und dann die von f und g jeweils mit Vielfachheiten! Beachten Sie dabei, daß es für den ggT nicht auf konstante Faktoren ankommt.

Lösung: Wir berechnen den größten gemeinsamen Teilers mit dem EUKLIDischen Algorithmus:

$$f : g = 1 \;\; \text{Rest } r_1 = 6X^5 + 12X^3 + 6X = 6(X^5 + 2X^3 + X)$$

Da es für den ggT und damit auch bei den Divisionsresten nicht auf konstante Faktoren ankommt, können wir mit $r_1/6$ weiter arbeiten:

$$g : (X^5 + 2X^3 + X) = X - 3 \;\; \text{Rest } r_2 = 2X^4 + 4X^2 + 2 = 2(X^4 + 2X^2 + 1)$$

Wieder ignorieren wir den Faktor zwei und dividieren als nächstes

$$(X^5 + 2X^3 + X) : (X^4 + 2X^2 + 1) = X \text{ Rest } 0$$

Somit ist $\mathrm{ggT}(f, g) = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$. Dieses Polynom hat $\pm i$ als doppelte Nullstelle.
$f/(X^4+2X^2+1) = X^2+3X+2$ und $g/(X^4+X^2+1) = X^2-3X+2$. Die beiden verbleibenden Nullstellen von f *bzw.* g haben also das Produkt zwei; ihre Summe ist im Falle von f gleich -3, bei g aber $+3$. Somit hat f außer den doppelten Nullstellen $\pm i$ noch die einfachen Nullstellen -1 und -2; in Falle von g sind es 1 und 2.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
G sei eine Gruppe und $\psi: G \to G$ sei die Abbildung, die jedes Element $g \in G$ auf $g^2 = g \cdot g$ abbildet. Zeigen Sie:

a) ψ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

Lösung: Ist G abelsch, so ist für alle $g, h \in G$

$$\psi(gh) = (gh)(gh) = g(hg)h = g(gh)h = (gg)(hh) = \psi(g)\psi(h)\,,$$

d.h. ψ ist ein Homomorphismus. Ist umgekehrt ψ ein Homomorphismus, so ist

$$g(hg)h = (gh)(gh) = \psi(gh) = \psi(g)\psi(h) = (gg)(hh) = g(gh)h$$

für alle $g, h \in G$. Multiplikation von links mit g^{-1} und von rechts mit h^{-1} zeigt, daß dann auch $hg = gh$ gilt; die Gruppe ist also abelsch.

b) Ist G eine endliche Gruppe ungerader Ordnung, so gibt es ein natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß $\psi(g^k) = \psi(g)^k = g$ ist für alle $g \in G$.

Lösung: Sei $|G| = n = 2k-1$. Nach dem Satz von LAGRANGE ist die Ordnung eines jeden Elements $g \in G$ ein Teiler der Gruppenordnung, d.h. g^n ist das Neutralelement. Damit ist $\psi(g^k) = \psi(g)^k = g^{2k} = g^{n+1} = g$ für alle $g \in G$.

c) Ist G eine endliche Gruppe gerader Ordnung, so ist ψ nie injektiv. (*Hinweis:* Zeigen Sie, daß $\mathrm{Kern}\,\psi$ genau aus den Elementen x besteht, die zu sich selbst invers sind, und daß deren Anzahl gerade ist.)

Lösung: $x \in G$ liegt genau dann im Kern von ψ, wenn $x \cdot x$ gleich dem Neutralelement ist. Dies ist äquivalent dazu, daß x invers zu sich selbst ist. Die Anzahl der Elemente, für die das nicht der Fall ist, ist gerade, denn die Menge dieser Elemente ist eine disjunkte Vereinigung zweielementiger Mengen der Form $\{g, g^{-1}\}$. Da die Elementanzahl von G gerade ist, muß auch der Kern als Komplement dieser Menge eine gerade Anzahl von Elementen haben, also wird außer dem Neutralelement noch mindestens ein weiteres Element auf das Neutralelement abgebildet. Somit ist ψ nicht injektiv.

d) Nun sei speziell G die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/N)^\times$. Für welche $N \geq 2$ ist ψ ein Automorphismus?

Lösung: Für $N = 2$ ist $(\mathbb{Z}/2)^\times = \{1\}$, und ψ ist die Identität, also ein Automorphismus. Für alle $N > 2$ ist $\varphi(N)$ gerade, denn wenn N durch eine ungerade Primzahl p teilbar ist, ist $\varphi(N)$ durch $p-1$ teilbar, und ist N eine Zweierpotenz 2^r mit $r > 1$, so ist N durch 2^{r-1} teilbar. Somit ist ψ für $N > 2$ nach *c)* nicht injektiv und damit kein Automorphismus.

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

a) G sei eine endliche Gruppe, und die Ordnung $|G|$ von G sei eine Primzahl. Zeigen Sie, daß G zyklisch ist!

Lösung: Die Ordnung eines Elements von G ist nach LAGRANGE ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$, und die ist nach Voraussetzung eine Primzahl p. Somit hat jedes Element entweder die Ordnung eins oder p. Da nur das Neutralelement Ordnung eins hat, haben alle anderen Elemente die Ordnung p und erzeugen daher die Gruppe G, die somit zyklisch sein muß.

b) Für welche natürlichen Zahlen N mit $9 \leq N \leq 14$ ist die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/N)^\times$ zyklisch?

Lösung: Die Ordnung von $(\mathbb{Z}/N)^\times$ ist $\varphi(N)$, und für $N = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$ mit verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ ist $\varphi(N) = \prod_{i=1}^r \big((p_i - 1)p^{e_i - 1}\big)$. Somit ist

$$\varphi(9) = 2 \cdot 3 = 6, \quad \varphi(10) = 4, \quad \varphi(11) = 10, \quad \varphi(12) = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{und} \quad \varphi(13) = 12\,.$$

Modulo 9 sind $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$ nicht kongruent eins; da alle Ordnungen Teiler von $\varphi(9) = 6$ sein müssen, hat zwei also die Ordnung sechs, und die Gruppe ist zyklisch.

Modulo 10 ist $3^2 = -1$, d.h. die Drei hat Ordnung vier, so daß auch diese Gruppe zyklisch ist.

11 und 13 sind Primzahlen, d.h. $\mathbb{Z}/11$ und $\mathbb{Z}/13$ sind Körper, und die multiplikative Gruppe eines jeden endlichen Körpers ist zyklisch.

Modulo 12 ist $5^2 = 25 \equiv 1$, $7^2 = 49 \equiv 1$ und $11^2 = 121 \equiv 1$, d.h. alle Elemente außer der Eins haben Ordnung zwei, so daß die Gruppe nicht zyklisch ist.

Modulo 14 ist $3^2 = 9 \not\equiv 1$ und $3^3 = 27 \equiv -1 \not\equiv 1$. Somit hat drei die Ordnung sechs, und die Gruppe ist zyklisch.

$(\mathbb{Z}/N)^\times$ ist also zyklisch für $N \in \{9, 10, 11, 13, 14\}$.

c) Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}/100)^\times$ das Inverse von drei!

Lösung: $100 : 3 = 33$ Rest 1; daher ist $1 = 100 - 3 \cdot 33 = 100 + 3 \cdot (-33)$. Somit ist $-33 \equiv 67 \bmod 100$ ein multiplikatives Inverses von drei.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Wegen der Einhaltung notwendiger Abstandsregeln dürfen maximal zweihundert Delegierte zum Parteitag der Partei für Gesundheit und Wohlstand in die Mehrzweckhalle der Stadt Großwortbach kommen; um ganz sicher zu gehen, begrenzt der Parteivorstand diese Zahl jedoch noch weiter. Bei der Begrüßung sitzen der Vorsitzende und seine drei Stellvertreter (mit gebührendem Abstand) auf dem Podium; die restlichen Delegierten sitzen in mehreren Siebenerreihen im Saal verteilt. Da sich herausstellt, daß dabei die horizontalen Abstände deutlich größer sind als die vertikalen, wird die Bestuhlung für den nächsten Tag verändert: Nun sitzen die Delegierten in Elferreihen; nur in der letzten Reihe sitzen nur acht. Auf dem Podium ändert sich nichts. Beim Abschlußbankett sitzen die Delegierten an großen runden Tische, an jedem Tisch vier. Wie viele Delegierte waren beim Parteitag?

Lösung: Die Anzahl der Delegierten sei gleich x. Wenn vier auf dem Podium sitzen, füllt der Rest eine gewisse Anzahl von Siebenerreihen; daher ist $x \equiv 4 \bmod 7$. Außerdem ist $x - 8 \equiv 4 \bmod 11$, also $x \equiv 12 \equiv 1 \bmod 11$. Schließlich ist x auch noch durch vier teilbar.

Beginnen wir mit den Kongruenzen modulo sieben und modulo elf. Der ggT der beiden Zahlen muß mit dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus als Linearkombination der beiden Zahlen dargestellt werden:

$$11 : 7 = 1 \;\text{ Rest } 4 \Longrightarrow 4 = 11 - 7$$
$$7 : 4 = 1 \;\text{ Rest } 3 \Longrightarrow 3 = 7 - 4 = 2 \cdot 7 - 11$$
$$4 : 3 = 1 \;\text{ Rest } 1 \Longrightarrow 1 = 4 - 3 = (11 - 7) - (7 - 4) = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7$$

Also ist

$$2 \cdot 11 = 22 \equiv \begin{cases} 1 \bmod 7 \\ 0 \bmod 11 \end{cases} \quad \text{und} \quad -3 \cdot 7 = -21 \equiv \begin{cases} 0 \bmod 7 \\ 1 \bmod 11 \end{cases} .$$

Die Summe aus dem Vierfachen der ersten Gleichung und der zweiten Gleichung führt auf die erste Lösung

$$22 \cdot 4 - 21 \cdot 1 = 67 \equiv \begin{cases} 4 \bmod 7 \\ 1 \bmod 11 \end{cases} .$$

Die allgemeine Lösung der beiden ersten Kongruenzen ist damit $67 + 77k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die gesuchte Zahl x muß auch noch durch vier teilbar sein. Da vier im Vergleich zu 77 sehr klein ist, findet man sie am schnellsten durch Probieren: 67 ist natürlich nicht durch vier teilbar, aber $67 + 77 = 144$ ist eine Viererzahl. Da die Lösung aller drei Kongruenzen eindeutig modulo $4 \cdot 77 = 308$ ist und es weniger als zweihundert Delegierte gibt, folgt $x = 144$.

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Wann heißt ein Element x eines (kommutativen) Rings R eine Einheit?

Lösung: $x \in R$ ist eine Einheit, wenn es ein $y \in R$ gibt mit $xy = 1$.

b) Zeigen Sie: Wenn $x \in R$ eine Einheit ist, so auch jede Potenz x^n.

Lösung: Ist $xy = 1$, so ist $x^n y^n = (xy)^n = 1$, so daß auch x^n eine Einheit ist

Nun sei $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$. Zeigen Sie:

c) Ist $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$, so ist auch $a - b\sqrt{2}$ eine.

Lösung: Ist $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit, so gibt es ein Element $c + d\sqrt{2} \in R$, für das

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} = 1$$

ist, d.h. $ac + 2bd = 1$ und $ad + bc = 0$. Damit ist auch

$$(a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = 1 ,$$

so daß auch $a - b\sqrt{2}$ eine Einheit ist.

d) $a + b\sqrt{2}$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$, wenn $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ ist.

Lösung: Ist $a + b\sqrt{2}$ eine Einheit, so nach *c)* auch $a - b\sqrt{2}$ und damit auch das Produkt $\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2$. Da dieses in $\mathbb{Z}$ liegt, kommt nur ± 1 in Frage, denn das Produkt einer ganze Zahl $z \neq 0$ und eines Elements $a + b\sqrt{2} \in R$ mit $b \neq 0$ liegt nicht in $\mathbb{Z}$.
Ist umgekehrt $a^2 - 2b^2 = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = \pm 1$, so ist $\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(\pm a \mp b\sqrt{2}\right) = 1$, d.h. $a + b\sqrt{2}$ ist eine Einheit.

e) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $a^2 - 2b^2 = 1$ mit einstelligen positiven ganzen Zahlen a und b!

Lösung: Für so eine Lösung muß $a^2 - 1$ das Doppelte einer positiven Quadratzahl sein. Für $2^2 - 1 = 3$ ist das nicht der Fall, aber $3^2 - 1 = 8 = 2 \cdot 2^2$. Somit ist $(a, b) = (3, 2)$ eine Lösung und $3 + 2\sqrt{2}$ eine Einheit.

f) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Einheiten in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}$ gibt!

Lösung: Nach *b)* ist auch jede Potenz einer Einheit eine Einheit; daher sind alle Zahlen $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$ Einheiten. Sie sind alle verschieden, denn $3 + 2\sqrt{2} > 1$, so daß die Folge dieser Zahlen streng monoton wächst.

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Zerlegen Sie das Polynom $f = 6X^4 - 12X^2$ sowohl in $\mathbb{Q}[X]$ als auch in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren! Wie viele irreduzible Faktoren gibt es jeweils?

Lösung: $f = 6X^2(X^2-2)$. Das Polynom X^2-2 ist in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, da es sonst rationale Nullstellen haben müßte, und X als lineares Polynom ist ohnehin irreduzibel. Der Vorfaktor zwölf ist sowohl in $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{Q}[X]$ eine Einheit. Es gibt somit drei irreduzible Faktoren. X und X^2-2 sind primitiv, also nach GAUSS auch über $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, allerdings ist die Sechs jetzt keine Einheit mehr, sondern das Produkt der irreduziblen Elemente zwei und drei. Die Zerlegung in $\mathbb{Z}[X]$ ist daher $f = 2 \cdot 3 \cdot X^2 \cdot (X^2-2)$ mit fünf irreduziblen Faktoren.

b) Finden Sie einen endlichen Erweiterungskörper $K/\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, daß f über K in Linearfaktoren zerfällt!

Lösung: Nur der Faktor $X^2 - 2$ kann noch weiter zerlegt werden: Über $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist $X^2 - 2 = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$, und damit ist in $K[X]$

$$f = 6 \cdot X^2 \cdot (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}) .$$

wobei die Sechs natürlich auch in K und in $K[X]$ eine Einheit ist.

c) Welchen Grad hat der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$?

Lösung: $[K : \mathbb{Q}] = 2$, und da f in $\mathbb{Q}[X]$ nicht in Linearfaktoren zerfällt, kann es keinen kleineren Körper geben, über dem f zerfällt.

Aufgabe 7: (*15 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Zerfällungskörper K_1 von $f_1 = X^4 - 2$ und K_2 von $f_2 = X^4 - 4$ sowie K_3 von $f_3 = X^4 - 16$ über $\mathbb{Q}$!

Lösung:

$$\begin{aligned} f_1 &= (X^2 - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) = (X + \sqrt[4]{2})(X - \sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2}) \\ f_2 &= (X^2 - 2)(X^2 + 2) = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X + i\sqrt{2})(X - i\sqrt{2}) \\ f_3 &= (X^2 - 4)(X^2 + 4) = (X + 2)(X - 2)(X + 2i)(X - 2i) \end{aligned}$$

Somit ist $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ und $K_3 = \mathbb{Q}(i)$.

b) Finden Sie möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasen der Körper K_ν!

Lösung: $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ hat Grad vier über $\mathbb{Q}$ mit Basis $1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}$ und $(\sqrt[4]{2})^3$. Durch Adjunktion von i entsteht K_1; hier bilden $1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, (\sqrt[4]{2})^3, i, i\sqrt[4]{2}, i\sqrt{2}$ und $i(\sqrt[4]{2})^3$ eine Basis.
Für K_2 bilden entsprechend $1, \sqrt{2}, i$ und $i\sqrt{2}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis, bei K_3 einfach 1 und i.

c) Für welche ν ist $K_\nu \cong \mathbb{Q}[X]/(f_\nu)$?

Lösung: $\mathbb{Q}[X]/(f_\nu)$ ist in allen drei Fällen ein vierdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wegen $[K_1 : \mathbb{Q}] = 8$ und $[K_3 : \mathbb{Q}] = 2$ kann es für $\nu = 1$ und $\nu = 3$ keinen Isomorphismus geben. Für $\nu = 2$ stimmen zwar die Dimensionen überein, aber da $f_2 = (X^2 - 2)(X^2 + 2)$ in $\mathbb{Q}[X]$ nicht irreduzibel ist, hat $\mathbb{Q}[X]/(f_2)$ Nullteiler und kann somit nicht isomorph zum Körper K_2 sein.

d) Für welche ν ist die Körpererweiterungen $K_\nu/\mathbb{Q}$ GALOISsch?

Lösung: Eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist genau dann GALOISsch, wenn K der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms aus $\mathbb{Q}[X]$ ist. Da in Charakteristik Null jedes Polynom separabel ist, sind alle $K_\nu/\mathbb{Q}$ GALOISsch.

e) Finden Sie alle Monomorphismen $K_2 \to \mathbb{C}$!

Lösung: Offensichtlich ist so ein Monomorphismus durch die Bilder von $\sqrt{2}$ und i eindeutig festgelegt. Da jeder Monomorphismus $\sigma : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{Q}$ die Identität ist und $\sqrt{a}$ Nullstelle des Polynoms $X^2 - a$ ist, kann das Bild von $\sqrt{a}$ nur $\sqrt{a}$ selbst oder $-\sqrt{a}$ sein. Es gibt somit, wie auf Grund der Dimension zu erwarten war, vier Monomorphismen, von denen wir nur angeben müssen, ob sie $\sqrt{2}$ *bzw.* i auf sich selbst abbilden oder auf sein Negatives. Sie sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
Bild von $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
Bild von i	i	i	$-i$	$-i$

f) Bestimmen Sie die Gruppe $G = \mathrm{Aut}(K_2/\mathbb{Q})$ und entscheiden Sie, ob diese auflösbar ist!

Lösung: Alle Monomorphismen $\sigma_j \colon K_2 \to \mathbb{C}$ bilden K_2 auf sich selbst ab, können also auch als Automorphismen von K_2 betrachtet werden (die $\mathbb{Q}$ automatisch festlassen). G besteht also aus diesen vier Automorphismen. Da σ_j^2 in allen Fällen gleich der Identität ist, ist diese Gruppe abelsch, also erst recht auflösbar. (Als abstrakte Gruppe ist sie isomorph zur KLEINschen Vierergruppe $V_4 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.)

g) Geben Sie alle Zwischenkörper L mit $\mathbb{Q} \subset L \subset K_2$ explizit an, und finden Sie, sofern möglich, jeweils eine Gruppe U von Automorphismen von K_2 derart, daß $K_2^U = L$ ist sowie eine Gruppe H von Automorphismen von L mit $L^H = \mathbb{Q}$!

Lösung: Da die GALOIS-Gruppe abelsch ist, ist jede Untergruppe Normalteiler, d.h. jeder Zwischenkörper ist GALOISsch über $\mathbb{Q}$. Zwischenkörper vom Grad zwei über $\mathbb{Q}$ sind die drei Körper, die von einem der Elemente $\sqrt{2}$, i und $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ erzeugt werden.
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist der Fixkörper von $\{\sigma_0, \sigma_2\}$, und $\mathbb{Q}$ ist der Fixkörper dieses Körpers unter der Gruppe bestehend aus den Einschränkungen von σ_0 und σ_1 (oder σ_3) auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
$Q(i)$ ist der Fixkörper von $\{\sigma_0, \sigma_1\}$, und $\mathbb{Q}$ ist der Fixkörper davon unter der Gruppe bestehend aus den Einschränkungen von σ_0 und σ_2 (oder σ_3) auf $\mathbb{Q}(i)$.
$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ist der Fixkörper von $\{\sigma_0, \sigma_3\}$, und $\mathbb{Q}$ ist der Fixkörper dieses Körpers unter der Gruppe bestehend aus den Einschränkungen von σ_0 und σ_1 (oder σ_2) auf $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

h) Zeigen Sie, daß $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$ ist!

Lösung: Da $\sqrt{2}$ und i beide in K_2 liegen, ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ auf jeden Fall ein Teilkörper von K_2. Falls es ein echter Teilkörper ist, muß er Grad zwei über $\mathbb{Q}$ haben. $(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$ liegt nicht in $\mathbb{Q}$, und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ist auch

$$(\sqrt{2} + i)^2 + a(\sqrt{2} + i) = 1 + 2\sqrt{2}i + a\sqrt{2} + ai$$

keine rationale Zahl. Somit ist der Teilkörper nicht quadratisch und muß daher ganz K_2 sein.